

# Introduction à l'Optique de Fourier

Jean-Marie Malherbe, Octobre 2007

## I – Rappels sur les séries de Fourier des fonctions périodiques

La série de Fourier d'une fonction périodique  $f(x)$  de période  $T$  est donnée par :

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{2i\pi nx/T}$$

avec

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) e^{-2i\pi nx/T} dx, \text{ avec } n \text{ entier relatif}$$

la formulation classique avec les  $a_n$  et les  $b_n$  est:

$$f(x) = a_0/2 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(2\pi nx/T) + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(2\pi nx/T)$$

$$\text{avec } c_n = \frac{1}{2} (a_n - i b_n) \text{ pour } n \geq 0 \\ c_{-n} = \frac{1}{2} (a_n + i b_n) \text{ pour } n \geq 0$$

$$\text{soit encore } a_n = c_n + c_{-n} \text{ pour } n \geq 0 \\ b_n = i (c_n - c_{-n}) \text{ pour } n \geq 0$$

$$a_0 = 2 c_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) dx$$

$$b_0 = 0$$

$a_0/2$  est la valeur moyenne de la fonction  $f(x)$  entre  $-T/2$  et  $T/2$ .

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \cos(2\pi nx/T) dx \quad \text{et} \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \sin(2\pi nx/T) dx \quad \text{pour } n \geq 0$$

**Théorème de Parseval :**

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 = \frac{1}{4} a_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |f(x)|^2 dx$$

Fonctions  $f(x)$  paires:  $c_n = c_{-n} = \frac{1}{2} a_n$  et  $b_n = 0$  pour  $n \geq 0$

Fonctions  $f(x)$  impaires:  $c_{-n} = \frac{1}{2} i b_n$ ,  $c_n = -\frac{1}{2} i b_n = -c_{-n}$  et  $a_n = 0$  pour  $n \geq 0$

*Exemple : série de Fourier d'un peigne de Dirac de période  $T$*

$$\text{III}_T(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(x-nT) \text{ où } \delta(x-nT) \text{ est la fonction de Dirac centrée en } x = nT$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \text{III}_T(x) e^{-2i\pi nx/T} dx = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(x) e^{-2i\pi nx/T} dx = 1/T$$

$$\text{III}_T(x) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{2i\pi nx/T}$$

## II – Rappels sur la transformation de Fourier (TF)

Dans un espace à 3 dimensions, la transformée de Fourier  $TF[f](\mathbf{u})$  ou  $F(\mathbf{u})$  de la fonction  $f(\mathbf{r})$ , où  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{r}$  sont des vecteurs est définie par :

$$TF[f](\mathbf{u}) = F(\mathbf{u}) = \iiint_{-\infty}^{+\infty} f(\mathbf{r}) e^{-2i\pi \mathbf{u} \cdot \mathbf{r}} d^3 \mathbf{r}$$

et la transformée inverse est donné par:

$$TF^{-1}[F](\mathbf{r}) = f(\mathbf{r}) = \iiint_{-\infty}^{+\infty} F(\mathbf{u}) e^{2i\pi \mathbf{u} \cdot \mathbf{r}} d^3 \mathbf{u}$$

### II - 1 - Transformation de Fourier à une dimension cartésienne

$$TF[f](u) = F(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-2i\pi ux} dx$$

et son inverse

$$TF^{-1}[F](x) = f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(u) e^{2i\pi ux} du$$

*Quelques propriétés remarquables :*

Relation transformée directe / inverse et double transformée:

$$TF^{-1}[TF[f]](x) = f(x)$$

$$TF^{-1}[f](x) = TF[f](u = -x)$$

$$TF[f](u) = TF^{-1}[f](x = -u)$$

$$D'où TF[TF[f]](x) = f(-x)$$

Transformée de Fourier d'une dérivée :

$$TF[f'](u) = 2i\pi u TF[f](u)$$

Transformée de Fourier d'une dérivée seconde:

$$TF[f''](u) = -4\pi^2 u^2 TF[f](u)$$

Transformée de Fourier d'une dérivée n-ième:

$$TF[f^{(n)}](u) = (2i\pi u)^n TF[f](u)$$

*Les opérations de dérivation n fois se réduisent à des multiplications par  $(2i\pi u)^n$*

Transformée de Fourier d'un produit de convolution de deux fonctions f et g. Le produit de convolution est défini par :

$$f * g (x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x') g(x-x') dx' = g * f (x)$$

cas particuliers utiles de produits de convolution:

$$\delta(x) * f(x) = f(x)$$

$$\delta_a(x) * f(x) = \delta(x-a) * f(x) = f(x-a)$$

$$\text{mais } \delta(x) f(x) = f(0) \delta(x) \text{ et } \delta_a(x) f(x) = f(a) \delta_a(x) = f(a) \delta(x-a)$$

La transformée de Fourier d'un produit de convolution  $f * g$  est le produit des transformées de Fourier de  $f$  et de  $g$  :

$$\mathbf{TF}[f * g](\mathbf{u}) = \mathbf{TF}[f](\mathbf{u}) \mathbf{TF}[g](\mathbf{u})$$

Et la réciproque au théorème ci dessus est la suivante: la transformée de Fourier d'un produit  $f g$  est le produit de convolution des transformées de Fourier de  $f$  et de  $g$  :

$$\mathbf{TF}[f g](\mathbf{x}) = \mathbf{TF}[f](\mathbf{x}) * \mathbf{TF}[g](\mathbf{x})$$

Homothétie  $x \rightarrow a x$ :

$$\mathbf{TF}[f(ax)](\mathbf{u}) = (1/a) \mathbf{TF}[f](\mathbf{u}/a)$$

Translation  $x \rightarrow x + a$ :

$$\mathbf{TF}[f(x+a)](\mathbf{u}) = e^{2i\pi \mathbf{u} a} \mathbf{TF}[f](\mathbf{u})$$

Transformée de Fourier de  $(x f)$ :

$$\mathbf{TF}[xf](\mathbf{u}) = (i/2\pi) d\mathbf{TF}[f](\mathbf{u})/d\mathbf{u}$$

Transformée de Fourier d'une fonction  $f(x)$  périodique de période  $T$  développable en série de Fourier (voir paragraphe précédent):

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{2i\pi n x/T} \quad c_n \text{ coefficients de Fourier}$$

$$F(\mathbf{u}) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-2i\pi \mathbf{u} x} dx = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi x(\mathbf{u}-n/T)} dx = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \delta(\mathbf{u}-n/T) \quad (\text{voir ci dessous})$$

C'est une somme de fonctions de Dirac centrées en  $\mathbf{u} = n/T$ .

Théorème de Parseval

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |\mathbf{TF}[f](\mathbf{u})|^2 d\mathbf{u}$$

Applications directes de la transformée de Fourier à une dimension :

- Fonction de Dirac  $\delta(x)$

$$\mathbf{TF}[\delta](\mathbf{u}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) e^{-2i\pi \mathbf{u} x} dx = 1, \text{ ce dont on déduit en passant à la transformée inverse :}$$

$$\delta(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2i\pi \mathbf{u} x} d\mathbf{u} \quad (\text{représente un paquet d'ondes planes})$$

- Fonction de Dirac  $\delta(x-a) = \delta_a(x)$

$$\mathbf{TF}[\delta_a](\mathbf{u}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-a) e^{-2i\pi \mathbf{u} x} dx = e^{-2i\pi \mathbf{u} a}, \text{ ce dont on déduit en passant à la transformée inverse :}$$

$$\delta_a(x) = \delta(x-a) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2i\pi \mathbf{u}(x-a)} d\mathbf{u} \quad (\text{paquet d'ondes planes})$$

- fonction porte  $\Pi_a(x)$  de largeur  $a$  (valeur 1 entre  $-a/2$  et  $+a/2$ ) :

$$\text{TF}[\Pi](u) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi_a(x) e^{-2i\pi ux} dx = \frac{\sin(\pi ua)}{\pi u} = a \text{sinc}(\pi ua)$$

où la fonction sinc est un sinus cardinal ( $\text{sinc}(x) = \sin(x) / x$ ). En optique, l'intensité diffractée à l'infini (diffraction de Fraunhofer) par une fente fine de largeur  $a$  est donnée par le carré du module de la transformée de Fourier d'une porte de largeur  $a$ , soit  $I(u) = I_0 [\sin(\pi ua)/\pi ua]^2$

- Peigne de Dirac de période  $T$

$$\text{III}_T(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(x-nT)$$

ses coefficients de Fourier sont  $c_n = 1/T$  d'où  $\text{TF}[\text{III}_T](u) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} 1/T \delta(u-n/T) = 1/T \text{III}_{1/T}(u)$

Sa transformée de Fourier est donc encore un peigne de Dirac, mais de période  $1/T$

- Gaussienne

$$\text{TF}[e^{-x^2/(2a^2)}](u) = a (2\pi)^{1/2} e^{-2\pi^2 a^2 u^2} \quad (\text{points d'inflexion d'abscisse } x = \pm a)$$

La transformée de Fourier d'une Gaussienne est une Gaussienne

- Equation des ondes  $\partial^2 E / \partial x^2 = (1/C^2) \partial^2 E / \partial t^2$

On pose prend la TF de cette équation sur la variable spatiale :

$$(2i\pi u)^2 \text{TF}[E] - (1/C^2) d^2 \text{TF}[E] / dt^2 = 0$$

ce qui donne une équation différentielle du second ordre sur  $t$ :

$$d^2 \text{TF}[E] / dt^2 + 4\pi^2 C^2 u^2 \text{TF}[E] = 0$$

dont la solution générale est:

$$\text{TF}[E] = A e^{2i\pi u C t} + B e^{-2i\pi u C t}$$

On prend ensuite la transformée inverse d'où l'on en déduit  $E(x,t)$ :

$$E(x,t) = A \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2i\pi u(x+Ct)} du + B \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2i\pi u(x-Ct)} du$$

ce qui définit un paquet d'ondes planes se propageant dans les sens des  $x$  positifs ou négatifs.

## II - 2 - Transformation de Fourier à trois dimensions

Les propriétés ci dessus en 1D cartésienne se généralisent :

Homothétie  $\mathbf{r} \rightarrow a \mathbf{r}$ ,  $a$  réel

$$\text{TF}[f(a\mathbf{r})](\mathbf{u}) = (1/a)^3 \text{TF}[f](\mathbf{u}/a)$$

Translation  $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r} + \mathbf{a}$ ,  $\mathbf{a}$  vecteur

$$\text{TF}[f(\mathbf{r}+\mathbf{a})](\mathbf{u}) = e^{2i\pi \mathbf{u} \cdot \mathbf{a}} \text{TF}[f](\mathbf{u})$$

Transformée de Fourier d'une dérivée partielle:

$$\text{TF}[\partial f / \partial x](\mathbf{u}) = 2i\pi u_x \text{TF}[f](\mathbf{u})$$

Transformée de Fourier d'une dérivée partielle seconde:

$$\text{TF}[\partial^2 f / \partial x^2](\mathbf{u}) = -4\pi^2 u_x^2 \text{TF}[f](\mathbf{u})$$

Les opérations de dérivation partielle  $n$  fois  $\partial^n / \partial x^n$  se réduisent à des multiplications par  $(2i\pi u_x)^n$

Transformée de Fourier d'un Laplacien:

$$\text{TF}[\Delta f](\mathbf{u}) = -4\pi^2 \mathbf{u}^2 \text{TF}[f](\mathbf{u}) \quad (\text{avec } \mathbf{u}^2 = \|\mathbf{u}\|^2)$$

Transformée de Fourier de  $x f(\mathbf{r})$ :

$$\text{TF}[x f(\mathbf{r})](\mathbf{u}) = (i/2\pi) \partial \text{TF}[f](\mathbf{u}) / \partial u_x$$

### II - 3 - Transformation de Fourier en symétrie sphérique

On part de la définition :

$$F(\mathbf{u}) = \iiint_{-\infty}^{+\infty} f(\mathbf{r}) e^{-2i\pi \mathbf{u} \cdot \mathbf{r}} d^3 \mathbf{r}$$

dans laquelle on pose  $d^3 \mathbf{r} = dr r d\theta r \sin\theta d\varphi$

et on suppose que  $f(\mathbf{r})$  ne dépend que de la seule variable radiale  $r$ .

En prenant Oz dans la direction du vecteur  $\mathbf{u}$ , on a  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{r} = u r \cos\theta$

$$F(\mathbf{u}) = \int_0^{+\infty} f(\mathbf{r}) r^2 \left\{ \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi e^{-2i\pi u r \cos\theta} \sin\theta d\theta \right\} dr$$

$$\underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi e^{-2i\pi u r \cos\theta} \sin\theta d\theta}_{\sin(2\pi u r) / (\pi u r)}$$

$$\text{d'où } F(\mathbf{u}) = 2/u \int_0^{+\infty} f(\mathbf{r}) r \sin(2\pi u r) dr$$

et la transformée de Fourier inverse est:

$$f(\mathbf{r}) = 2/r \int_0^{+\infty} F(\mathbf{u}) u \sin(2\pi u r) du$$

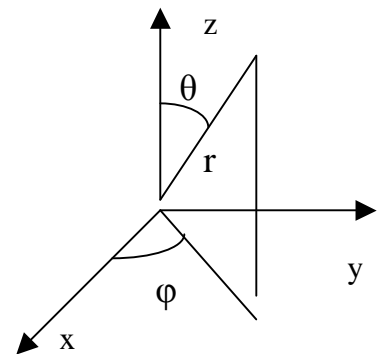
Applications directes de la transformée de Fourier sphérique :

$$\text{Transformée de } f(r) = e^{-r/R} / r \rightarrow F(\mathbf{u}) = 1 / (\pi u^2 + 1/(4\pi R^2))$$

Lorsque  $R \rightarrow \infty$ , on en déduit la transformée de Fourier de  $f(r) = 1/r$  :

$$f(r) = 1/r \rightarrow F(\mathbf{u}) = 1 / (\pi u^2)$$

A titre d'exemple, résolvons l'équation de Poisson  $\Delta f + \rho/\epsilon_0 = 0$  où  $\rho(x) = q \delta(r)$ , charge ponctuelle. La transformation de Fourier donne  $-4\pi^2 u^2 F + q/\epsilon_0 = 0$ , soit  $F(\mathbf{u}) = q/(4\pi^2 u^2 \epsilon_0)$ , d'où l'on déduit  $f(r) = q / (4\pi \epsilon_0 r)$



$$0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

$$0 < \theta < \pi$$

### III – Transformation de Fourier polaire : la transformation de Hankel

Reprenons la définition de la transformation de Fourier à 2 dimensions :

$$F(\mathbf{u}) = \iint_{-\infty}^{+\infty} f(\mathbf{r}) e^{-2i\pi \mathbf{u} \cdot \mathbf{r}} d^2\mathbf{r}$$

En coordonnées polaires  $(r, \theta)$ , on a  $x = r \cos\theta$  et  $y = r \sin\theta$  et l'élément de surface  $d^2\mathbf{r} = dr r d\theta$  ( $0 \leq \theta \leq \pi$ ), avec  $r^2 = x^2 + y^2$

On suppose que  $f(\mathbf{r})$  ne dépend que de la seule variable radiale  $r$ . En prenant Oy dans la direction du vecteur  $\mathbf{u}$ , on a  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{r} = u r \sin\theta$

$$F(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(r) r e^{-2i\pi u r \sin\theta} dr d\theta = \int_0^{+\infty} f(r) r \left[ \int_0^{2\pi} e^{-2i\pi u r \sin\theta} d\theta \right] dr$$

$$\text{on pose } e^{-2i\pi u r \sin\theta} = \cos(2\pi u r \sin\theta) + i \sin(2\pi u r \sin\theta)$$

$$F(u) = 2 \int_0^{+\infty} f(r) r \left[ \int_0^{\pi} \cos(2\pi u r \sin\theta) d\theta \right] dr$$

car l'intégrale sur le sinus est nulle pour raison de parité

Remarquant que la fonction de Bessel  $J_n(x)$  s'écrit :

$$J_n(x) = 1/\pi \int_0^{\pi} \cos(n\theta - x \sin\theta) d\theta$$

on peut introduire la fonction de Bessel  $J_0(x)$

$$J_0(x) = 1/\pi \int_0^{\pi} \cos(x \sin\theta) d\theta$$

et on trouve la transformée de Hankel :

$$F(u) = 2\pi \int_0^{+\infty} f(r) r J_0(2\pi u r) dr$$

et sa réciproque :

$$f(r) = 2\pi \int_0^{+\infty} F(u) u J_0(2\pi u r) du$$

*Applications directes de la transformation de Hankel :*

Celle ci est très utile en optique en raison de la symétrie cylindrique des faisceaux.

La figure de diffraction à l'infini (diffraction de Fraunhofer) d'un télescope est donnée par le carré du module de la transformée de Fourier d'une fonction porte de rayon R. La transformée de Hankel d'une porte s'écrit :

$$F(u) = 2\pi \int_0^R r J_0(2\pi u r) dr$$

Les fonctions de Bessel obéissent à la formule de récurrence :  $d(x^{n+1} J_{n+1}(x))/dx = x^{n+1} J_n(x)$

D'où l'on tire  $d(x J_1(x))/dx = x J_0(x)$

On en déduit  $F(u) = R J_1(2\pi u R) / u$

Et la figure de diffraction du télescope est donnée par:  $I(u) = I_0 (2 J_1(2\pi u R) / 2\pi u R)^2$

Le rayon de la tache de diffraction est donné par le premier zéro de  $J_1$  qui vaut 3.832.

En posant  $u = \sin(\alpha) / \lambda$ , on en déduit pour  $\alpha$  petit  $\alpha = 0.61 \lambda/R$

Pour un télescope de rayon  $R_2$  à **occultation centrale** de rayon  $R_1$  (anneau), on aurait eu :

$$F(u) = 2\pi \int_{R_1}^{R_2} r J_0(2\pi u r) dr = [R_2 J_1(2\pi u R_2) - R_1 J_1(2\pi u R_1)] / u$$

$$Et I(u) = I_0 [R_2 J_1(2\pi u R_2) - R_1 J_1(2\pi u R_1)]^2 / [\pi u (R_2^2 - R_1^2)]^2$$

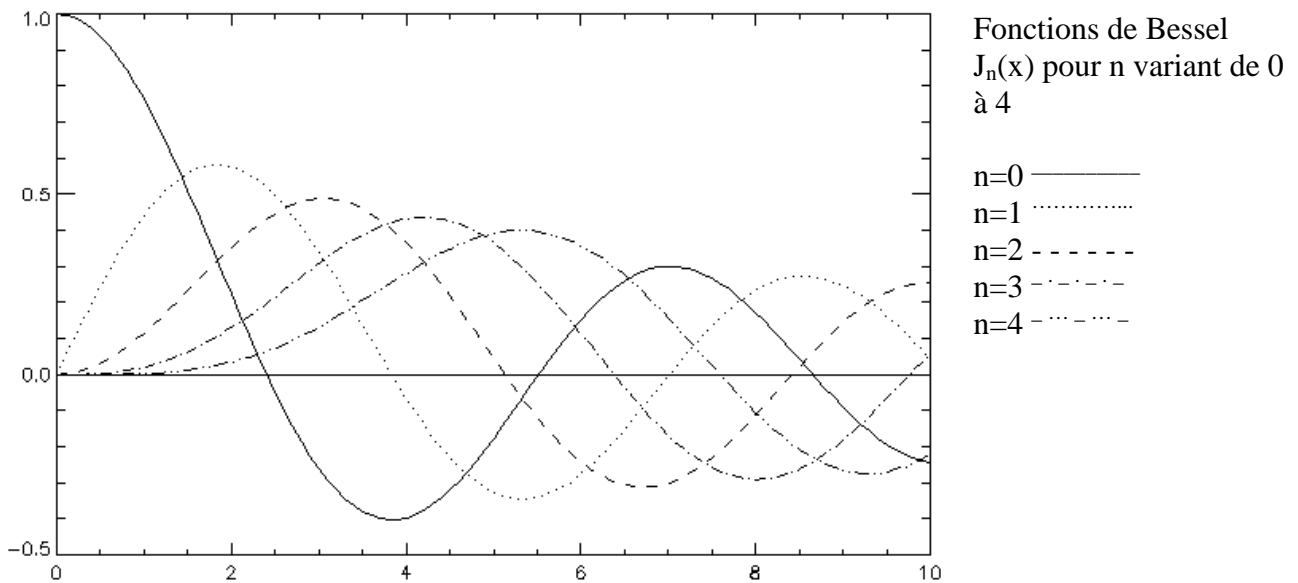
*Note sur les fonctions de Bessel d'indice entier n:*

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (x/2)^{n+2k} / (k!(n+k)!)$$

Comportement asymptotique:

$$x \rightarrow 0 \quad J_n(x) \rightarrow (x/2)^n / n!$$

$$x \rightarrow \infty \quad J_n(x) \rightarrow [2 / (\pi x)]^{1/2} \cos(x - (\pi/2)(n+1/2))$$



**Quelques transformées de Hankel courantes:**

$$f(r) = \delta(r-R) \rightarrow F(u) = 2\pi R J_0(2\pi u R) \quad \text{Fonction de Dirac centrée en } r = R \text{ (couronne)}$$

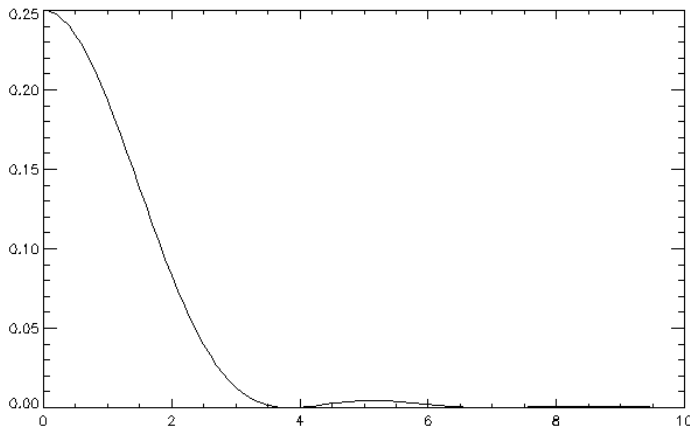
$$f(r) = \Pi_R(r) \rightarrow F(u) = R J_1(2\pi u R) / u \quad \text{Fonction Porte de rayon } R \text{ (trou)}$$

$$f(r) = 1/r \rightarrow F(u) = 1/u$$

$$f(r) = e^{-\pi r^2} \rightarrow F(u) = e^{-\pi u^2} \quad \text{gaussienne} \rightarrow \text{gaussienne}$$

$$f(r) = e^{i\pi r^2/R^2} \rightarrow F(u) = \sqrt{i} R e^{-i\pi R^2 u^2}$$

$$f(r) = (r^2 + R^2)^{-1/2} \rightarrow F(u) = e^{-(2\pi R u)} / u$$



Fonction de Bessel  
cardinal  $J_1(x)/x$   
apparaissant dans la  
diffraction à l'infini par  
une ouverture circulaire

#### IV – équation des ondes $\Delta E = (1/C^2) \partial^2 E / \partial t^2$ ; ondes planes et sphériques

Cette équation se résout par séparation des variables en mettant  $E(\mathbf{r}, t)$  de la forme  $E(\mathbf{r}) T(t)$  :

Avec  $T(t) = A e^{i\omega t} + B e^{-i\omega t}$

Il reste  $\Delta E + k^2 E = 0$  où  $k = \omega / C$

Coordonnées cartésiennes :  $\Delta E = \partial^2 E / \partial x^2 + \partial^2 E / \partial y^2 + \partial^2 E / \partial z^2$

Coordonnées cylindriques :  $\Delta E = (1/r) \partial(r \partial E / \partial r) / \partial r + (1/r^2) \partial^2 E / \partial \theta^2 + \partial^2 E / \partial z^2$

Coordonnées sphériques :  $\Delta E = (1/r) \partial^2(rE) / \partial r^2 + (1/r^2 \sin \theta) \partial(\sin \theta \partial E / \partial \theta) / \partial \theta + (1/r^2 \sin^2 \theta) \partial^2 E / \partial \phi^2$

*Ondes planes progressives :*

On a la solution classique  $E(\mathbf{r}, t) = A e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \omega t)} + B e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$

Avec  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = k_x x + k_y y + k_z z$

*Ondes sphériques progressives :*

Dans ce cas, la seule variable est  $r$  (aucune dépendance angulaire)

$$(1/r) \partial^2(rE) / \partial r^2 + k^2 E = 0$$

En posant  $rE = X(r)$  il vient  $\partial^2 X / \partial r^2 + k^2 X = 0$  d'où  $X = A e^{ikr}$

Et l'onde sphérique est  $E(r, t) = X(r) T(t) / r = A e^{i(kr + \omega t)} / r + B e^{i(kr - \omega t)} / r$

*Ondes cylindriques progressives :*

On recherche des solutions en posant  $E(\mathbf{r}) = R(r) Z(z)$  qui vérifient :

$$(1/rR) \partial(r \partial R / \partial r) / \partial r + (1/Z) \partial^2 E / \partial z^2 + k^2 = 0$$

Posons :

$$(1/Z) \partial^2 E / \partial z^2 + k_z^2 = 0 \text{ avec } k_z \text{ nombre réel, alors } Z = \beta e^{\pm i k_z z}$$

Il reste à résoudre en remplaçant :



$$(1/rR) \partial(r \partial R/\partial r)/\partial r + k^2 - k_z^2 = 0$$

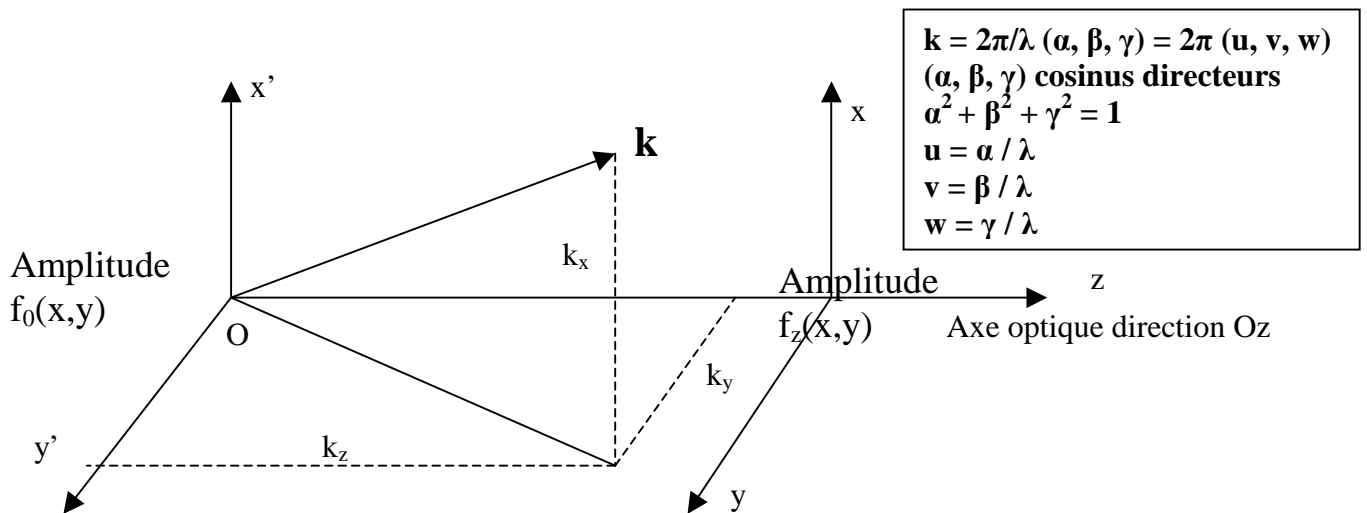
$$\text{soit } \partial^2 R/\partial r^2 + (1/r) \partial R/\partial r + R K^2 = 0 \text{ où } K^2 = k^2 - k_z^2$$

C'est une équation de Bessel dont la solution est  $J_0(Kr)$ , et on obtient la solution générale :

$$E(\mathbf{r}, t) = \sum_n \sum_k J_0((k^2 - k_z^2)^{1/2} r) (A e^{i(k_z z + \omega t)} + B e^{i(k_z z - \omega t)})$$

Dans la suite, on utilisera uniquement les ondes progressives **planes ou sphériques**.

## V – Propagation d'un rayon lumineux : la diffraction de Fresnel



**Problématique** : connaissant l'amplitude  $f_0(x, y)$  d'une onde dans le plan  $z = 0$ , comment en déduire celle de l'onde  $f_z(x, y)$  dans le plan  $z$  ?

Une onde monochromatique plane s'exprime par  $E = E_0 e^{i(2\pi/\lambda)(\alpha x + \beta y + \gamma z) - \omega t}$

Si on désigne par  $f_0(x, y)$  l'amplitude de l'onde dans le plan  $z = 0$  et par  $f_z(x, y)$  l'amplitude de l'onde dans le plan  $z$ , on a :

$$f_z(x, y) = f_0(x, y) e^{i(2\pi/\lambda) \gamma z}$$

L'amplitude d'une onde monochromatique quelconque peut s'exprimer dans le plan origine  $z = 0$  sous la forme d'une transformée de Fourier inverse :

$$f_0(x, y) = \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} \int F(u, v) e^{2i\pi(u x + v y)} du dv \quad u = \alpha / \lambda, v = \beta / \lambda$$

Dans un plan  $z$  quelconque, le résultat précédemment établi  $f_z(x, y) = f_0(x, y) e^{i(2\pi/\lambda) \gamma z}$  reste bien sûr valable.  $(\alpha, \beta, \gamma)$  sont les cosinus directeurs de la direction de propagation.

### V – 1 - Principe d'Huygens Fresnel

On se place dans l'approximation de l'optique **paraxiale**, avec  $\alpha \ll \gamma$  et  $\beta \ll \gamma$  de sorte qu'on peut mettre  $\gamma = (1 - \alpha^2 - \beta^2)^{1/2}$  sous la forme plus commode :

$$\gamma = 1 - \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2)$$

$$f_z(x, y) = \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} \int F(u, v) e^{2i\pi(u x + v y + w z)} du dv \quad \text{avec } w = \gamma / \lambda$$

$$f_z(x,y) = e^{2i\pi z / \lambda} \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} \int F(u,v) e^{-i\pi/\lambda z (u^2 + v^2)} e^{2i\pi (ux + vy)} du dv$$

avec  $\alpha = u \lambda$ ,  $\beta = v \lambda$ , il suit :

$$f_z(x,y) = e^{2i\pi z / \lambda} \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} \int F(u,v) e^{-i\pi\lambda z (u^2 + v^2)} e^{2i\pi (ux + vy)} du dv$$

$$f_z(x,y) = e^{2i\pi z / \lambda} \text{TF}^{-1}[F(u,v) e^{-i\pi\lambda z (u^2 + v^2)}]$$

On a vu que  $\text{TF}[e^{-x^2/(2a^2)}](u) = a (2\pi)^{1/2} e^{-2\pi^2 a^2 u^2}$  ; on en déduit que la fonction  $e^{-i\pi\lambda z u^2}$  est la transformée de Fourier de la fonction  $[e^{i\pi x^2 / \lambda z}] / (i \lambda z)^{1/2}$

Donc la fonction  $P(u,v) = e^{-i\pi\lambda z (u^2 + v^2)}$  est la transformée de Fourier de la fonction  $p_z(x,y) = [e^{i\pi (x^2 + y^2) / \lambda z}] / (i \lambda z)$

On a vu que  $\text{TF}[f * p] = \text{TF}[f] \text{TF}[p] = F(u,v) P(u,v)$  d'où  $f * p = \text{TF}^{-1}(F(u,v) P(u,v))$

La quantité  $\text{TF}^{-1}[F(u,v) e^{-i\pi\lambda z (u^2 + v^2)}]$  est donc égale  $\text{TF}^{-1}[F](x,y) * \text{TF}^{-1}[e^{-i\pi\lambda z (u^2 + v^2)}](x,y)$ , c'est à dire à  $f_0(x,y) * p_z(x,y)$  puisque  $F(u,v) = \text{TF}[f_0](x,y)$ , d'où :

$$f_z(x,y) = e^{2i\pi z / \lambda} f_0(x,y) * [e^{i\pi (x^2 + y^2) / \lambda z}] / (i \lambda z)$$

qui donne la relation entre l'amplitude de l'onde dans le plan quelconque z en fonction de l'amplitude dans le plan origine z = 0.

**La fonction  $p_z(x,y) = e^{2i\pi z / \lambda} [e^{i\pi (x^2 + y^2) / \lambda z}] / (i \lambda z)$  est appelée propagateur de Fresnel.**

C'est la réponse impulsionnelle ( $f_0(x,y) = \delta(x,y)$ ) à la diffraction de Fresnel.

**$f_z(x,y)$  s'appelle la transformée de Fresnel de l'onde.**

En remarquant que  $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} \approx z (1 + 1/2(x^2 + y^2)/z^2) = z + 1/2(x^2 + y^2)/z$

$$f_z(x,y) = f_0(x,y) * [e^{2i\pi r / \lambda}] / (i \lambda r)$$

Cette formule résume le **principe d'Huygens Fresnel** : chaque point du plan  $(x,y,0)$  émet des ondes sphériques dont l'amplitude est  $f_0(x,y)$ ; l'amplitude  $f_z(x,y)$  de l'onde dans le plan  $(x,y)$  à z fixé est la somme de toutes les amplitudes de ces ondes sphériques.

## V - 2 - Transformée de Fourier Fresnel

Développons le produit de convolution :

$$f_z(x,y) = e^{2i\pi z / \lambda} / (i \lambda z) \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} \int f_0(x',y') e^{i\pi [(x-x')^2 + (y-y')^2] / \lambda z} dx' dy'$$

$$f_z(x,y) = e^{2i\pi z / \lambda} e^{i\pi (x^2 + y^2) / \lambda z} / (i \lambda z) \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} \int f_0(x',y') e^{i\pi (x'^2 + y'^2) / \lambda z} e^{-2i\pi (xx' + yy')} / \lambda z dx' dy'$$

$$f_z(x,y) = [e^{2i\pi z/\lambda} / (i \lambda z)] e^{i\pi (x^2 + y^2)/\lambda z} \text{TF}[f_0(x',y')] e^{i\pi (x'^2 + y'^2)/\lambda z} (u=x/\lambda z, v=y/\lambda z)$$

C'est la transformée de Fourier Fresnel. La transformée de Fourier de  $f_0(x',y')$  prise pour  $u = x/(\lambda z)$  et  $v = y/(\lambda z)$ . Elle établit la relation entre l'amplitude de l'onde  $f_0(x,y)$  dans le plan  $z=0$  et l'amplitude de l'onde  $f_z(x,y)$  dans le plan  $z$ .

**En pratique, l'intensité lumineuse  $I_z(x,y)$  est donnée par le carré du module de  $f_z(x,y)$  et est proportionnelle à ( $K$  constante dépendant de  $z$ ):**

$$I_z(x,y) = K(z) \left| \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} f_0(x',y') e^{i\pi (x'^2 + y'^2)/\lambda z} e^{-2i\pi (ux' + vy')} dx' dy' \right|^2 \text{ avec } u=x/(\lambda z), v=y/(\lambda z)$$

### V - 3 - Diffraction de Fraunhofer à l'infini

Ce cas particulier se déduit de la transformée de Fresnel lorsque  $z \rightarrow \infty$

$$f_z(x,y) = [e^{2i\pi z/\lambda} / (i \lambda z)] \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} f_0(x',y') e^{-2i\pi (ux' + vy')} dx' dy' \text{ avec } u=x/(\lambda z), v=y/(\lambda z)$$

$$f_z(x,y) = [e^{2i\pi z/\lambda} / (i \lambda z)] \text{TF}[f_0(x',y')](u=\alpha/\lambda, v=\beta/\lambda)$$

la figure de diffraction à l'infini est donc la transformée de Fourier de  $f_0(x',y')$  prise pour  $u = \alpha / \lambda$  et  $v = \beta / \lambda$  où  $\alpha$  et  $\beta$  sont les cosinus directeurs sur le plan  $(x,y)$  de la direction d'observation.

### V - 4 - Autre formulation de la transformée de Fresnel : lien avec les intégrales de Fresnel

Dans le produit de convolution, on pose  $\mathbf{X} = (\mathbf{x}'-\mathbf{x}) (2/\lambda z)^{1/2}$  et  $\mathbf{Y} = (\mathbf{y}'-\mathbf{y}) (2/\lambda z)^{1/2}$  :

$$f_z(x,y) = e^{2i\pi z/\lambda} / (i \lambda z) \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} f_0(x',y') e^{i\pi [(x-x')^2 + (y-y')^2]/\lambda z} dx' dy'$$

devient avec ce changement de variables ( $X$  et  $Y$  sont sans dimension) :

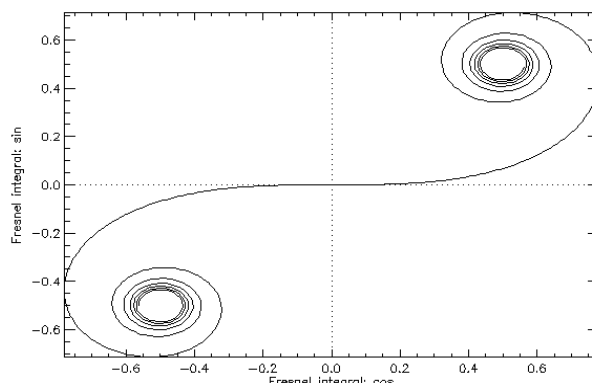
$$f_z(x,y) = e^{2i\pi z/\lambda} / (2i) \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} f_0(\mathbf{x}+\mathbf{X}(\lambda z/2)^{1/2}, \mathbf{y}+\mathbf{Y}(\lambda z/2)^{1/2}) e^{i\pi (\mathbf{X}^2 + \mathbf{Y}^2)/2} d\mathbf{X} d\mathbf{Y}$$

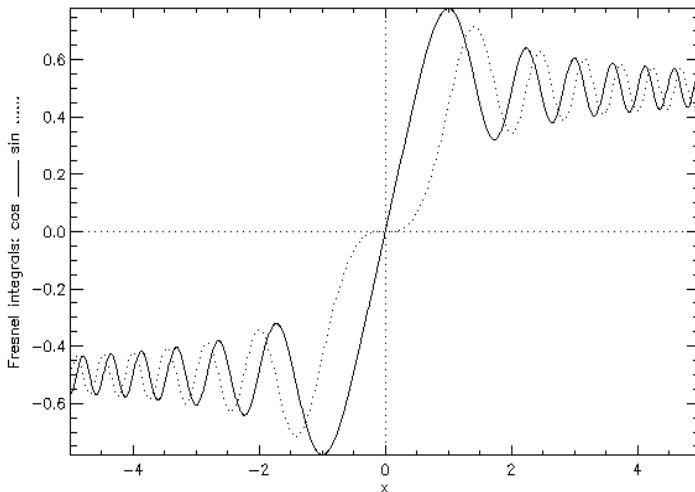
Cette formulation est utile dans certains cas où l'on peut utiliser les **intégrales de Fresnel**  $C(X)$  et  $S(X)$  définies par :

$$C(X) + i S(X) = \int_0^X e^{i\pi t^2/2} dt = \int_0^X \cos(\pi t^2/2) dt + i \int_0^X \sin(\pi t^2/2) dt$$

Spirale de Cornu : ensemble des points  $M ( C(x), S(x) )$

Les intégrales de Fresnel sont tabulées et faciles à calculer numériquement.





Intégrales de Fresnel  $C(x)$  — et  $S(x)$  .....

On a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} C(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} S(x) = 1/2$

et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} C(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} S(x) = -1/2$

Remarque sur la parité :  $C(-x) = -C(x)$  et  $S(-x) = -S(x)$   
 Les intégrales de Fresnel sont des fonctions impaires

### V – 5 - Nombre de Fresnel

On peut considérer qu'on est en diffraction à l'infini à la distance  $z$  lorsque  $(x^2 + y^2) / \lambda z \ll 1$ , soit si  $D^2 / \lambda z \ll 1$ ,  $D$  étant une dimension caractéristique (rayon d'un diaphragme par exemple). Le nombre dans dimension :

$$N_f = D^2 / \lambda z$$

est appelé nombre de Fresnel. Pour être proche d'une diffraction à l'infini, on doit avoir  $N_f \ll 1$ .

### V – 6 - Masques d'amplitude, masques de phase

Les masques sont des éléments que l'on place généralement dans le plan  $z = 0$  et qui vont donc **multiplier l'amplitude de l'onde  $f_0(x,y)$  par une fonction  $t(x,y)$  connue.**

Pour les masques d'amplitude, la transmission  $t(x,y)$  est un nombre réel, ils n'ont donc pas d'action sur la phase de l'onde. Parmi les masques d'amplitude classiques, on peut citer :

- les densités neutres infiniment minces
- les diaphragmes (trou circulaire, fente fine, fenêtre rectangulaire, bord)
- les dispositifs partiellement occultants (disque circulaire, fil)

Par exemple, pour un trou circulaire de rayon  $R$ , la fonction de transmission s'écrit :

$$t(x,y) = 1 \text{ pour } x^2 + y^2 < R^2$$

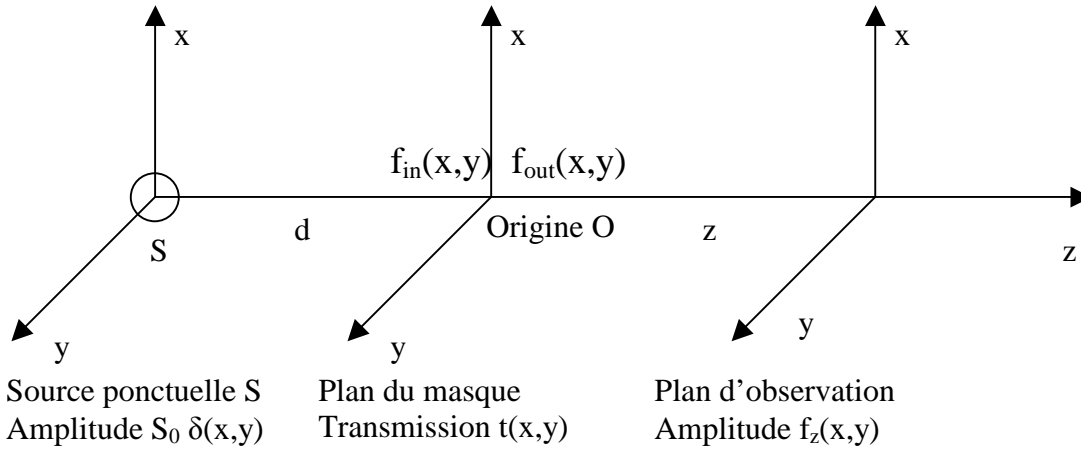
$$t(x,y) = 0 \text{ pour } x^2 + y^2 > R^2$$

Les masques de phase agissent sur la phase de l'onde. Supposons qu'une onde traverse dans le plan  $z = 0$  un milieu **d'indice de réfraction  $n$**  et de faible épaisseur  $e(x,y)$ . Si  $f_0$  est l'amplitude de l'onde à l'entrée, elle vaut à la sortie  $f_n(x,y) = f_0(x,y) e^{-2i\pi/\lambda n e(x,y)}$ ,  $\lambda$  étant la longueur d'onde dans l'air. Or l'amplitude de l'onde aurait été  $f_1(x,y) = f_0 e^{-2i\pi/\lambda e(x,y)}$  pour le même chemin, mais dans l'air. On en conclut que la transmission  $t(x,y) = f_n(x,y) / f_1(x,y)$  est :

$$t(x,y) = e^{-2i\pi/\lambda (n-1) e(x,y)} \text{ pour un masque de phase d'épaisseur } e(x,y) \text{ et d'indice } n$$

Une lame quart d'onde de transmission  $t(x,y) = e^{i\pi/2}$  ou une lame demi onde de transmission  $t(x,y) = e^{i\pi}$  sont des masques de phase. Une lentille est un masque de phase quadratique (voir plus loin).

## V - 7 - Diffraction d'une source ponctuelle par un masque quelconque



L'amplitude incidente  $f_{in}(x,y)$  au plan  $z = 0$  est la transformée de Fresnel de la source ponctuelle  $S_0 \delta(x,y)$ , dans ce cas particulier, c'est donc la réponse impulsionnelle:

$$f_{in}(x,y) = e^{2i\pi d/\lambda} S_0 \delta(x,y) * [e^{i\pi(x^2+y^2)/\lambda d}] / (i \lambda d)$$

$$f_{in}(x,y) = S_0 [e^{2i\pi d/\lambda} / (i \lambda d)] [e^{i\pi(x^2+y^2)/\lambda d}]$$

L'amplitude sortante  $f_{out}(x,y)$  du plan  $z = 0$  fait intervenir  $t(x,y)$  :

$$f_{out}(x,y) = S_0 [e^{2i\pi d/\lambda} / (i \lambda d)] [e^{i\pi(x^2+y^2)/\lambda d}] t(x,y)$$

L'amplitude  $f_z(x,y)$  dans le plan  $z$  est la transformée de Fresnel de  $f_{out}(x,y)$ , soit :

$$f_z(x,y) = e^{2i\pi z/\lambda} f_{out}(x,y) * [e^{i\pi(x^2+y^2)/\lambda z}] / (i \lambda z)$$

$$f_z(x,y) = - S_0 [e^{2i\pi(z+d)/\lambda} / (\lambda^2 d z)] [e^{i\pi(x^2+y^2)/\lambda d} t(x,y)] * [e^{i\pi(x^2+y^2)/\lambda z}]$$

$$f_z(x,y) = - S_0 [e^{2i\pi(z+d)/\lambda} / (\lambda^2 d z)] \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} \int t(x',y') e^{i\pi(x'^2+y'^2)/\lambda d} e^{i\pi[(x-x')^2+(y-y')^2]/\lambda z} dx' dy'$$

$$f_z(x,y) = - S_0 [e^{2i\pi(z+d)/\lambda} / (\lambda^2 dz)] e^{i\pi(x^2+y^2)/\lambda z} \mathbf{TF}[t(x',y') e^{i\pi/\lambda(x'^2+y'^2)(1/d+1/z)}](u=x/\lambda z, v=y/\lambda z)$$

Quand  $d \rightarrow \infty$ , on retrouve la transformée de Fourier Fresnel vue plus haut. On peut faire une application immédiate de cette formule avec la diffraction de Fresnel par une lentille mince.

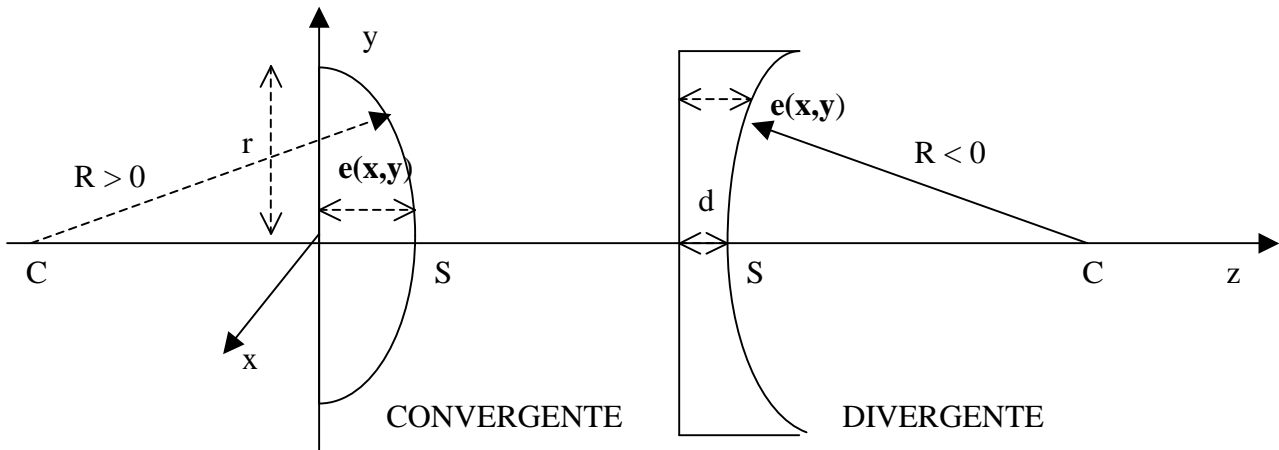
## V - 8 - Diffraction d'une source ponctuelle par une lentille mince

L'épaisseur traversée par le faisceau en *incidence normale*, tombant au point de coordonnées  $(x,y)$  sur la face d'entrée de la lentille, est donnée par :

$$e(x,y) = r^2/(2R) - (x^2 + y^2) / (2R) \text{ pour la lentille convergente avec } R > 0$$

$$e(x,y) = d - (x^2 + y^2) / (2R) \text{ pour la lentille divergente avec } R < 0$$

Le rayon de courbure vaut  $R = CS$  en valeur algébrique sur l'axe Oz.



On obtient  $t(x,y)$  pour les différents cas de figure suivants (à une constante de phase près qui vaut  $e^{-i\pi/\lambda} (n-1)r^2/R$  ou  $e^{-2i\pi/\lambda} (n-1)d$  selon le cas), avec  $R_1=C_1S_1$  pour le premier dioptre traversé et  $R_2=C_2S_2$  pour le second dioptre traversé:

- Lentille plan convexe :  $t(x,y) = e^{-i\pi/\lambda} (x^2+y^2)(n-1)/R$  avec  $R > 0$
- Lentille bi convexe :  $t(x,y) = e^{-i\pi/\lambda} (x^2+y^2)(n-1)(1/R_2-1/R_1)$  avec  $R_2 > 0$  et  $R_1 < 0$
- ménisque bi convexe :  $t(x,y) = e^{-i\pi/\lambda} (x^2+y^2)(n-1)(1/R_2-1/R_1)$  avec  $R_1 > R_2 > 0$
- Lentille plan concave :  $t(x,y) = e^{-i\pi/\lambda} (x^2+y^2)(n-1)/R$  avec  $R < 0$
- Lentille bi concave :  $t(x,y) = e^{-i\pi/\lambda} (x^2+y^2)(n-1)(1/R_2-1/R_1)$  avec  $R_1 > 0$  et  $R_2 < 0$
- ménisque bi concave :  $t(x,y) = e^{-i\pi/\lambda} (x^2+y^2)(n-1)(1/R_2-1/R_1)$  avec  $R_1 < R_2 < 0$

soit  $t(x,y) = e^{-i\pi/\lambda} (x^2+y^2)/f'$  où  $1/f' = (n-1)(1/R_2-1/R_1)$  est la vergence de la lentille.

$$f_z(x,y) = -S_0 [e^{2i\pi(z+d)/\lambda} / (\lambda^2 d z)] e^{i\pi(x^2+y^2)/\lambda z} \text{TF}[e^{-i\pi/\lambda} (x'^2+y'^2)(n-1)(1/R_2-1/R_1) e^{i\pi/\lambda} (x'^2+y'^2)(1/d+1/z)]$$

pour  $(u=x/\lambda z, v=y/\lambda z)$

$$f_z(x,y) = -S_0 [e^{2i\pi(z+d)/\lambda} / (\lambda^2 d z)] e^{i\pi(x^2+y^2)/\lambda z} \text{TF}[e^{i\pi/\lambda} (x'^2+y'^2)(1/d + 1/z - (n-1)(1/R_2-1/R_1))] \text{ pour } (u=x/\lambda z, v=y/\lambda z)$$

On remarque que la TF est particulièrement simple si  $1/d + 1/z - (n-1)(1/R_2-1/R_1) = 0$ , puisqu'on a alors à faire à la TF de 1, qui n'est autre qu'une fonction de Dirac  $\delta(x,y)$ .

Dans ce cas,

$$f_z(x,y) = -S_0 [e^{2i\pi(z+d)/\lambda} / (\lambda^2 d z)] e^{i\pi(x^2+y^2)/\lambda z} \delta(x,y)$$

pour la valeur particulière de  $z$  qui est telle que  $1/d + 1/z = (n-1)(1/R_2-1/R_1) = 1/f'$

Cette relation n'est autre que la **relation de conjugaison** des lentilles minces. Elle montre que la source ponctuelle  $S$  est conjuguée avec un point lumineux (fonction de Dirac) dont la position est donnée par la relation de conjugaison classique.

### V - 9 - Diffraction d'une source étendue par un masque quelconque

L'amplitude incidente  $f_{in}(x,y)$  au plan  $z = 0$  est la transformée de Fresnel de la source étendue  $S(x,y)$ :

$$f_{in}(x,y) = e^{2i\pi d/\lambda} S(x,y) * [e^{i\pi(x^2+y^2)/\lambda d}] / (i \lambda d)$$

L'amplitude  $f_z(x,y)$  dans le plan z est la transformée de Fresnel de  $f_{out}(x,y) = f_{in}(x,y) t(x,y)$  :

$$f_z(x,y) = e^{2i\pi z/\lambda} f_{out}(x,y) * [e^{i\pi(x^2+y^2)/\lambda z}] / (i \lambda z)$$

## **VI – Diffraction de Fresnel par quelques masques d'amplitude classiques**

Dans tous les exemples qui suivent, on se place dans le cas où le masque est un masque d'amplitude éclairé par une source ponctuelle S située à l'infini. On va donc calculer l'amplitude de l'onde diffractée dans le plan z à partir de la transformée de Fourier Fresnel du masque de transmission  $t(x,y)$ , la constante K représentant les termes de phase qui ne sont pas utiles ici.

$$f_z(x,y) = K \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} t(x',y') e^{i\pi(x'^2+y'^2)/\lambda z} e^{-2i\pi(ux'+vy')} dx' dy' \quad \text{où } u=x/(\lambda z) \text{ et } v=y/(\lambda z)$$

### **VI – 1 - Diffraction de Fresnel par une fente fine**

Il s'agit d'une fonction porte de largeur a, telle que :

$$|x| > a/2 : t(x) = 0$$

$$|x| < a/2 : t(x) = 1$$

La seconde formulation de la transformée de Fresnel est plus aisée pour cette question avec le changement de variable  $X = (x'-x) (2/\lambda z)^{1/2}$  et inversement  $x' = x + X(\lambda z/2)^{1/2}$ :

$$f_z(x) = K \int_{-\infty}^{+\infty} t(x+X(\lambda z/2)^{1/2}) e^{i\pi X^2/2} dX$$

$$t(x+X(\lambda z/2)^{1/2}) = 1 \text{ pour } x+X(\lambda z/2)^{1/2} > -a/2 \text{ entraîne } X > (-a/2 -x) (2/(\lambda z))^{1/2}$$

$$t(x+X(\lambda z/2)^{1/2}) = 1 \text{ pour } x+X(\lambda z/2)^{1/2} < a/2 \text{ entraîne } X < (a/2 -x) (2/(\lambda z))^{1/2}$$

Normalisons x en posant  $t = x/a$ , alors on a  $(-1/2 -t) (2a^2/(\lambda z))^{1/2} < X < (1/2 -t) (2a^2/(\lambda z))^{1/2}$

Ceci définit les bornes d'intégration X1 et X2 en fonction de  $t = x/a$ .

$$f_z(t = x/a) = K \int_{X1}^{X2} e^{i\pi X^2/2} dX = K [ \int_{X1}^{X2} \cos(\pi X^2/2) dX + i \int_{X1}^{X2} \sin(\pi X^2/2) dX ]$$

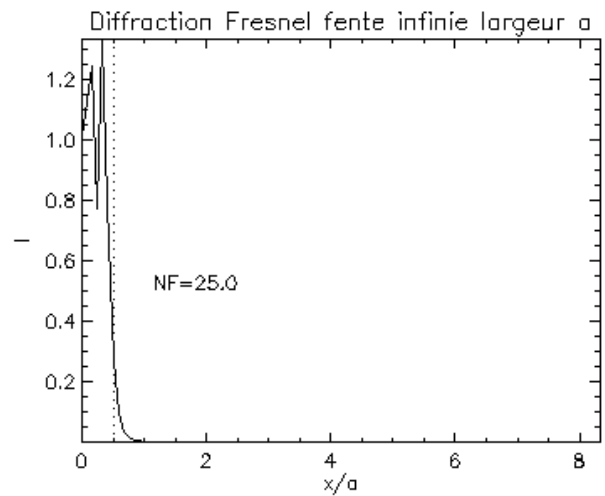
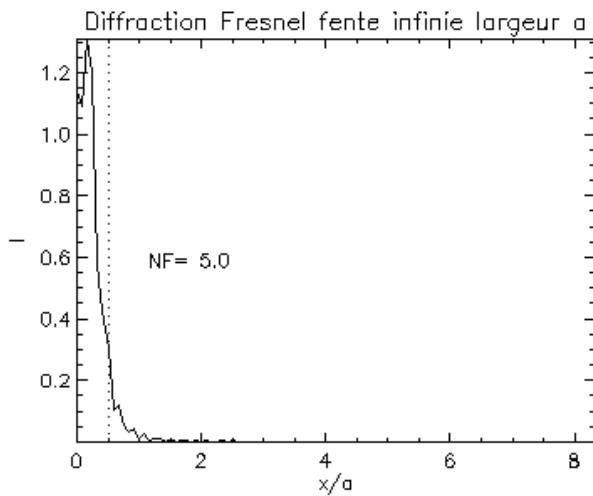
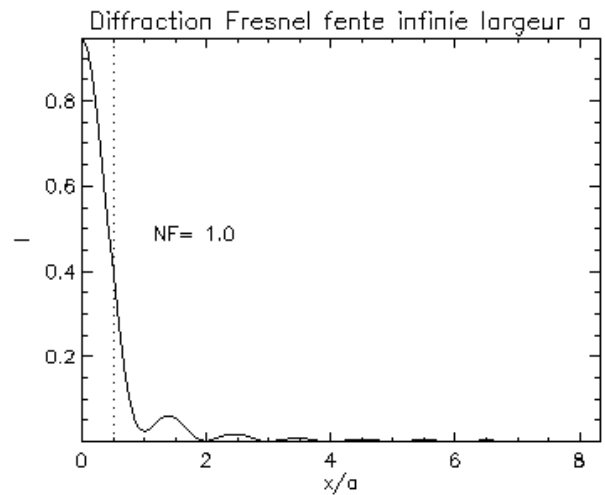
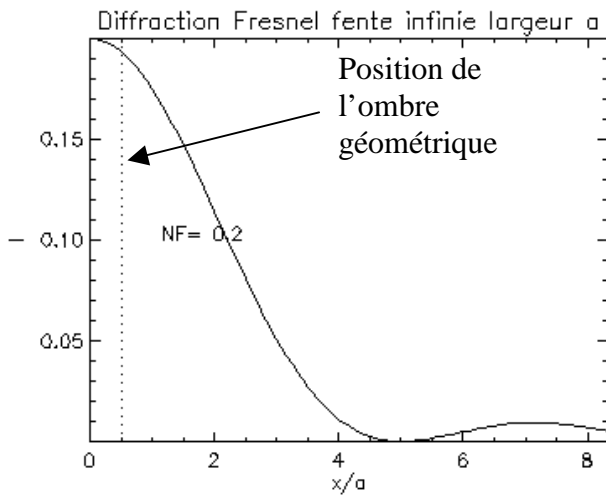
Où  $X1 = (-1/2 -t) (2N)^{1/2}$  et  $X2 = (1/2 -t) (2N)^{1/2}$  avec  $N = a^2/(\lambda z)$  nombre de Fresnel

$$f_z(t = x/a) = K [ C(X2)-C(X1) + i (S(X2)-S(X1)) ], S \text{ et } C \text{ étant les intégrales de Fresnel}$$

et l'intensité diffractée est donnée par  $I(t = x/a) = K [ \{ C(X2)-C(X1) \}^2 + \{ S(X2)-S(X1) \}^2 ]$

$$I(t=x/a) = K[ \{ C( (1/2-t)(2N)^{1/2} ) + C( (1/2+t)(2N)^{1/2} ) \}^2 + \{ S( (1/2-t)(2N)^{1/2} ) + S( (1/2+t)(2N)^{1/2} ) \}^2 ]$$

L'intensité est donnée ci dessous pour  $N = 0.2, 1, 5$  et  $25$ . Pour  $N=0.2$  on est proche de la diffraction de Fraunhofer. A  $N$  grand, on se rapproche de l'ombre géométrique (en pointillés).



## VI - 2 - Diffraction de Fresnel par un fil occultant

Il s'agit d'une fonction porte de largeur  $a$ , telle que :

$$|x| > a/2 : t(x) = 1$$

$$|x| < a/2 : t(x) = 0$$

Avec les mêmes notations et changements de variable que ci dessus, il vient :

$$f_z(t = x/a) = K \left[ \int_{-\infty}^{X1} e^{i\pi X^2/2} dX + \int_{X2}^{+\infty} e^{i\pi X^2/2} dX \right]$$

$$\text{Or } \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\pi X^2/2} dX = 1 + i = \int_{-\infty}^{X1} e^{i\pi X^2/2} dX + \int_{X1}^{X2} e^{i\pi X^2/2} dX + \int_{X2}^{+\infty} e^{i\pi X^2/2} dX \quad \text{d'où l'on tire}$$

$$f_z(t = x/a) = K \left[ 1 + i - \int_{X1}^{X2} e^{i\pi X^2/2} dX \right]$$

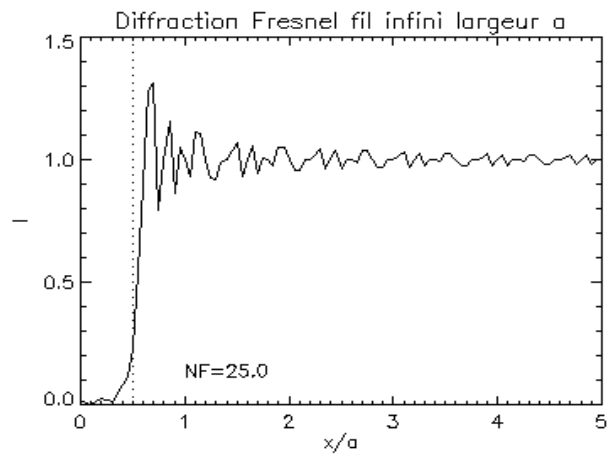
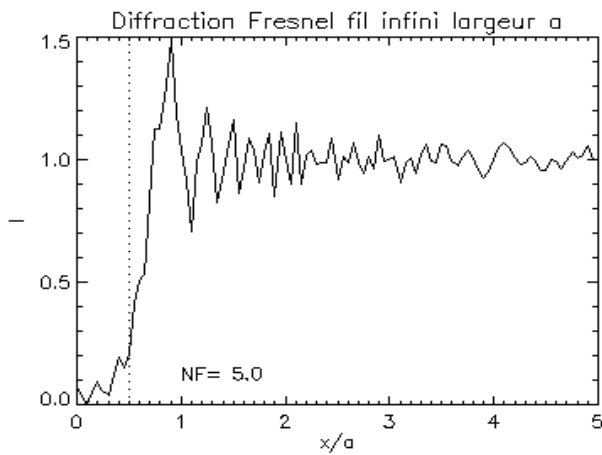
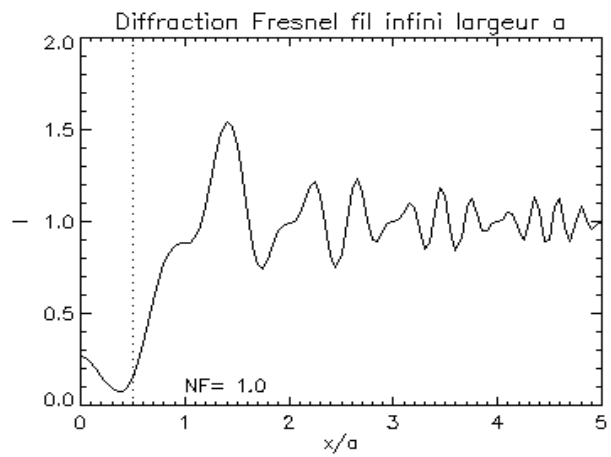
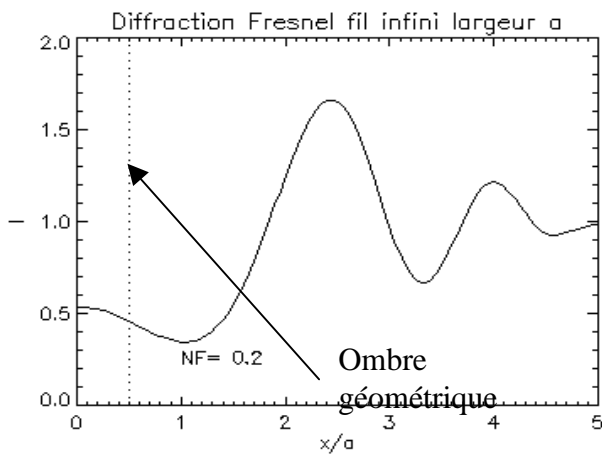
$$f_z(t = x/a) = K \left[ \left( 1 - \int_{X1}^{X2} \cos(\pi X^2/2) dX \right) + i \left( 1 - \int_{X1}^{X2} \sin(\pi X^2/2) dX \right) \right]$$

$$f_z(t = x/a) = K \left[ 1 - C(X2) + C(X1) + i \left( 1 - S(X2) + S(X1) \right) \right]$$

d'où l'intensité diffractée

$$I(t) = K \left[ \left\{ 1 - C \left( (1/2 - t)(2N)^{1/2} \right) - C \left( (1/2 + t)(2N)^{1/2} \right) \right\}^2 + \left\{ 1 - S \left( (1/2 - t)(2N)^{1/2} \right) - S \left( (1/2 + t)(2N)^{1/2} \right) \right\}^2 \right]$$





### VI – 3 - Diffraction de Fresnel par un bord

On étudie le cas de la diffraction par un bord placé en  $x=0$ .

$x > 0$  :  $t(x) = 1$

$x < 0$  :  $t(x) = 0$

Avec les mêmes notations et changements de variable que ci dessus, il vient :

$$f_z(x) = K \int_{-\infty}^{+\infty} t(x+X(\lambda z/2)^{1/2}) e^{i\pi X^2/2} dX$$

$t(x+X(\lambda z/2)^{1/2}) = 1$  pour  $x+X(\lambda z/2)^{1/2} > 0$  entraîne  $X > -x (2/(\lambda z))^{1/2}$

$t(x+X(\lambda z/2)^{1/2}) = 0$  pour  $x+X(\lambda z/2)^{1/2} < 0$  entraîne  $X < -x (2/(\lambda z))^{1/2}$

$$f_z(t = x/a) = K \int_{X_1}^{+\infty} e^{i\pi X^2/2} dX \quad \text{Où } X_1 = -x (2/(\lambda z))^{1/2}$$

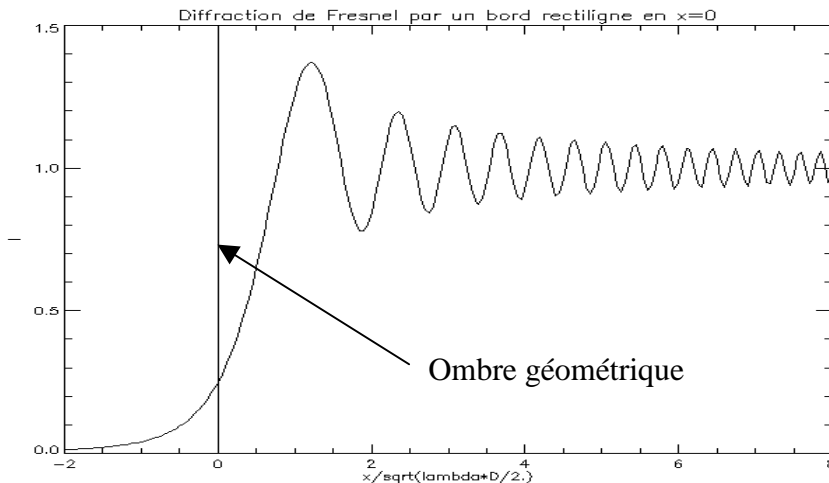
$$\text{Or } \int_0^{+\infty} e^{i\pi X^2/2} dX = 1/2 + i/2 = \int_0^{X_1} e^{i\pi X^2/2} dX + \int_{X_1}^{+\infty} e^{i\pi X^2/2} dX \quad \text{d'où l'on tire}$$

$$f_z(x) = K \int_{X_1}^{+\infty} e^{i\pi X^2/2} dX = K [1/2 + i/2 - \int_0^{X_1} e^{i\pi X^2/2} dX]$$

$$f_z(x) = K [ (1/2 - \int_0^{X_1} \cos(\pi X^2/2) dX ) + i (1/2 - \int_0^{X_1} \sin(\pi X^2/2) dX ) ]$$

$f_z(x) = K [ 1/2 - C(X_1) + i (1/2 - S(X_1)) ]$  d'où l'intensité diffractée

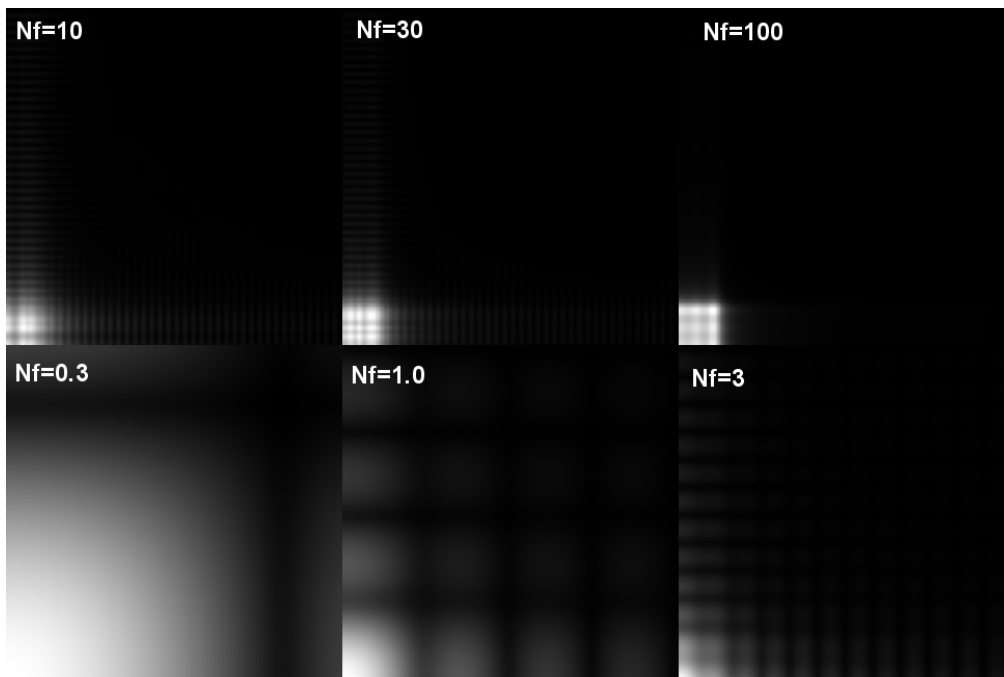
$$I(x) = K [ \{ 1/2 + C(x (2/(\lambda z))^{1/2}) \}^2 + \{ 1/2 + S(x (2/(\lambda z))^{1/2}) \}^2 ]$$



Diffraction de Fresnel par un bord rectiligne en  $x = 0$

On a représenté l'intensité en fonction de la variable sans dimension  $x (2/(\lambda z))^{1/2}$

#### VI – 4 - Diffraction de Fresnel par une fenêtre carrée de côté a



Diffraction de Fresnel par une ouverture carrée de côté a

On a représenté seulement, pour raison de symétrie, la partie du plan  $x > 0$  et  $y > 0$

On utilise encore la seconde formulation de la transformée de Fresnel, dans laquelle les variables en x et y se séparent puisqu'on a un produit de deux portes  $f_0$  et  $g_0$  indépendantes en x et y :

$$f_z(x,y) = e^{2i\pi z / \lambda} / (2i) \int_{-\infty}^{+\infty} f_0(x+X(\lambda z/2))^{1/2} e^{i\pi X^2/2} dX \int_{-\infty}^{+\infty} g_0(y+Y(\lambda z/2))^{1/2} e^{i\pi Y^2/2} dY$$

L'intensité résultante est le carré du module de  $f_z(x,y)$  où l'on voit encore apparaître les intégrales de Fresnel C(t), S(t), C(s), S(s), t et s étant des variables normalisées obtenues en posant  $t = x/a$  et  $s = y/a$ . Les bornes des deux intégrales ci dessus sont les suivantes :

selon X :

$$(-1/2 -t) (2N)^{1/2} < X < (1/2 -t) (2N)^{1/2}$$

et selon Y :

$$(-1/2 -s) (2N)^{1/2} < Y < (1/2 -s) (2N)^{1/2}$$

avec  $N = a^2/(\lambda z)$  nombre de Fresnel

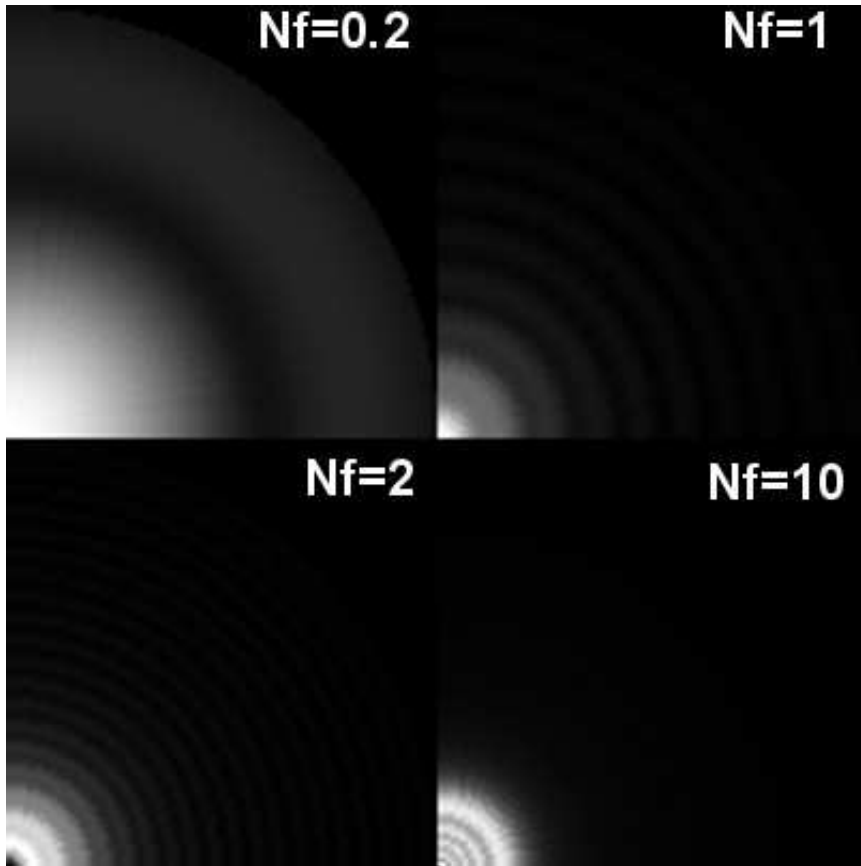
## VI – 5 - Diffraction de Fresnel par une ouverture circulaire

On utilise ici la transformée de Fourier Fresnel

$$f_z(x,y) = K \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} t(x',y') e^{i\pi(x'^2+y'^2)/\lambda z} e^{-2i\pi(ux'+vy')} dx' dy' \quad \text{où } u=x/(\lambda z) \text{ et } v=y/(\lambda z)$$

Le problème étant à symétrie cylindrique, cette transformée de Fourier devient une **transformée de Hankel** définie au début du chapitre avec  $r'^2 = x'^2 + y'^2$ ,  $u = (x^2 + y^2)^{1/2}/(\lambda z) = r/(\lambda z)$ :

$$f_z(r) = K \int_0^{+\infty} t(r') e^{i\pi r'^2/\lambda z} r' J_0(2\pi u r') dr' \quad \text{où } u = r/(\lambda z)$$



Diffraction de Fresnel par une ouverture circulaire de rayon R.

Pour  $N=0.2$  on est proche de la diffraction de Fraunhofer.

Pour  $N$  grand, on se rapproche de l'ombre géométrique du trou.

Une tache centrale sombre correspondant à  $f_z(0)=0$  apparaît pour  $N$  entier pair, c'est la tache de Poisson, caractéristique de la diffraction à distance finie.

$f_z(0)$  varie en effet comme la fonction  $\sin(\pi N/2)$ .

↑ ↑  
La fonction masque est donnée par :

$$\begin{aligned} r < R : t(r) &= 1 \\ r > R : t(r) &= 0 \end{aligned}$$

$$f_z(r) = K \int_0^R e^{i\pi r'^2/\lambda z} r' J_0(2\pi u r') dr' \quad \text{où } u = r/(\lambda z)$$

On normalise les variables en posant  $r' = x R$  et  $r = y R$ , d'où il vient :

$$f_z(y) = K \int_0^1 e^{i\pi x^2 R^2/\lambda z} x J_0(2\pi xy R^2/\lambda z) dx$$

Posons  $N = R^2/\lambda z$  nombre de Fresnel.

$$f_z(y) = K \int_0^1 e^{i\pi N x^2} x J_0(2\pi N xy) dx$$

et l'intensité diffractée dans le plan z est proportionnelle à :

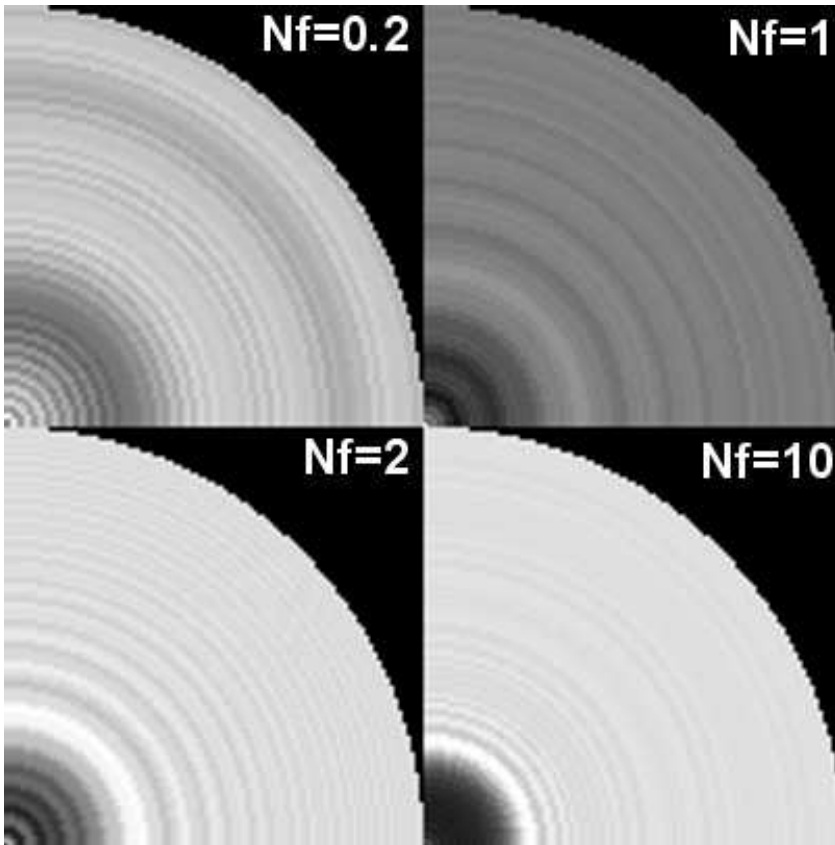
$$I(y = r/R) = \left[ \int_0^1 \cos(\pi N x^2) \times J_0(2\pi N xy) dx \right]^2 + \left[ \int_0^1 \sin(\pi N x^2) \times J_0(2\pi N xy) dx \right]^2$$

### VI – 6 - Diffraction de Fresnel par un anneau circulaire de rayon intérieur R et extérieur Re

Il y a maintenant une occultation centrale de rayon R ; avec les mêmes notations et normalisations  $r' = x R$  et  $r = y R$  que pour l'ouverture circulaire de rayon R, on obtient :

$$f_z(y) = K \int_1^{Re/R} e^{i\pi N x^2} \times J_0(2\pi N xy) dx$$

$$I(y = r/R) = \left[ \int_1^{Re/R} \cos(\pi N x^2) \times J_0(2\pi N xy) dx \right]^2 + \left[ \int_1^{Re/R} \sin(\pi N x^2) \times J_0(2\pi N xy) dx \right]^2$$

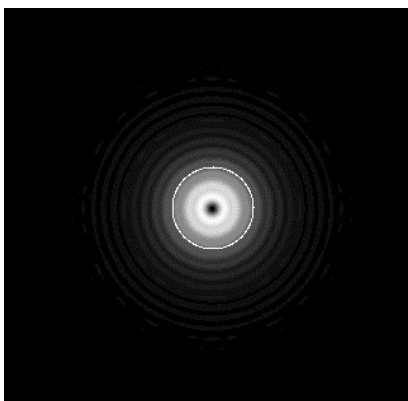


Diffraction de Fresnel par un anneau circulaire de rayon intérieur occultant R et de rayon extérieur  $Re = 30 R$ .

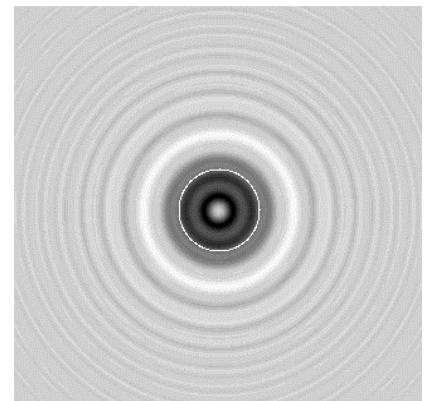
Pour N grand, on se rapproche de l'ombre géométrique du disque occulteur.

$f_z(0)$  varie comme la fonction :  
 $\sin(\pi N(Re^2/R^2 - 1)/2)$

En conséquence, une tache centrale lumineuse, dite tache de Poisson ( $f_z(0)$  maximum), apparaît pour certaines valeurs de N.



*Tache centrale de Poisson dans les phénomènes de diffraction de Fresnel à distance finie*  
 A gauche : diffraction par un diaphragme circulaire  
 à droite : diffraction par un disque plein  
 (Ombre géométrique en trait blanc)

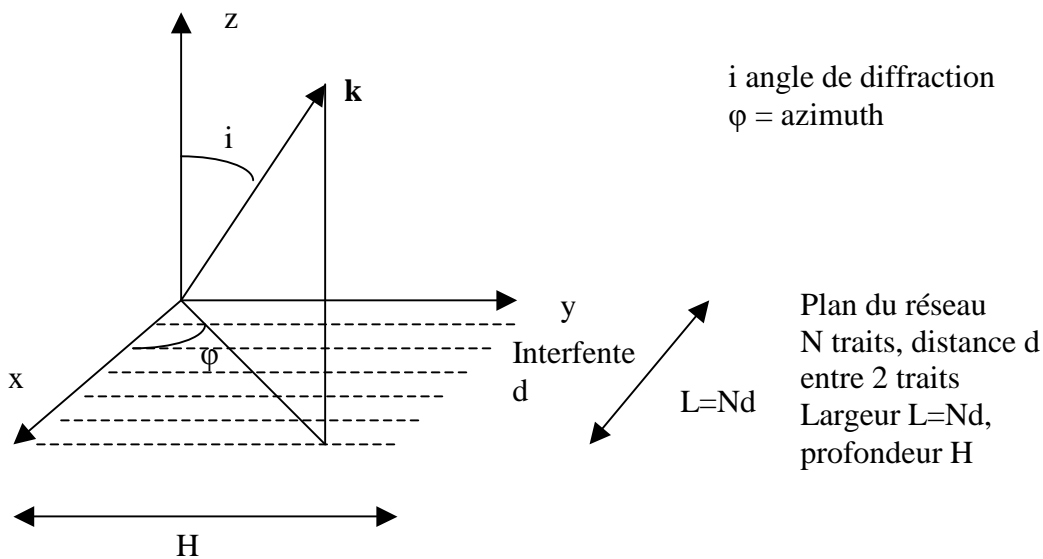


## VII – diffraction à l’infini par un réseau plan

Les réseaux de diffraction constituent les éléments dispersifs des spectrographes. Le faisceau incident produit par le collimateur est en lumière parallèle. On observe la figure de diffraction à l’infini du réseau au foyer de l’objectif de chambre. Un réseau de diffraction plan peut être représenté simplement par la fonction :

$$res(x,y) = [ \Pi_a(x) * ( \text{III}_d(x) \Pi_L(x) ) ] \Pi_H(y) = f(x) g(y)$$

où L est la largeur du réseau dans la direction x, H est la largeur du réseau dans la direction y, d est la distance entre deux traits du réseau dans la direction x, et a est la largeur de chaque trait du réseau dans la direction x.  $\Pi_L$  est la fonction porte de largeur L et  $\text{III}_d$  est la fonction peigne de période d.



$res(x,y)$  est un produit de deux fonctions indépendantes  $f(x)$  et  $g(y)$  qui se séparent. La figure de diffraction à l’infini est donc donnée par le produit des transformées de Fourier sur x et y:

$$R(u,v) = F(u) G(v) = \text{TF}[\Pi_a](u) \text{TF}[\text{III}_d \Pi_L](u) \text{TF}[\Pi_H](v)$$

On sait que  $\text{TF}[\Pi_a](u) = a \sin(\pi u a) / (\pi u a)$ ,  $\text{TF}[\Pi_H](v) = H \sin(\pi v H) / (\pi v H)$

$$\text{TF}[\text{III}_d \Pi_L](u) = \int_{-\infty}^{+\infty} \text{III}_d(x) \Pi_L(x) e^{-2i\pi ux} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=0}^{N-1} \delta(x-nd) e^{-2i\pi ux} dx$$

où N est le nombre de traits du réseau (donc  $L = N d$ ).

$$\text{TF}[\text{III}_d \Pi_L](u) = \sum_{n=0}^{N-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-nd) e^{-2i\pi ux} dx = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-2i\pi u n d} = (1 - e^{-2i\pi u N d}) / (1 - e^{-2i\pi u d})$$

$$\text{TF}[\text{III}_d \Pi_L](u) = e^{-i\pi u (N-1) d} [\sin(\pi u N d) / \sin(\pi u d)]$$

Et finalement:

$$R(u,v) = aH e^{-i\pi u (N-1) d} [\sin(\pi u a) / (\pi u a)] [\sin(\pi v H) / (\pi v H)] [\sin(\pi u N d) / \sin(\pi u d)]$$

On en déduit que l'intensité diffractée vaut  $R(u,v) R^*(u,v)$  ( $R^*$  quantité conjuguée) :

$$I(u,v) = I_0/N^2 [\sin(\pi u a) / (\pi u a)]^2 [\sin(\pi v H) / (\pi v H)]^2 [\sin(\pi u N d) / \sin(\pi u d)]^2$$

C'est le produit de la figure de diffraction par une fente de dimensions  $a * H$  multipliée par une fonction d'interférence des  $N$  fentes de distance interfente  $d$ .

Evaluons maintenant les cosinus directeurs  $u$  et  $v$  (voir figure):

Le vecteur d'onde diffracté a pour coordonnées  $\mathbf{k}$  ( $\sin i \cos \varphi, \sin i \sin \varphi, \cos i$ ), on en déduit :

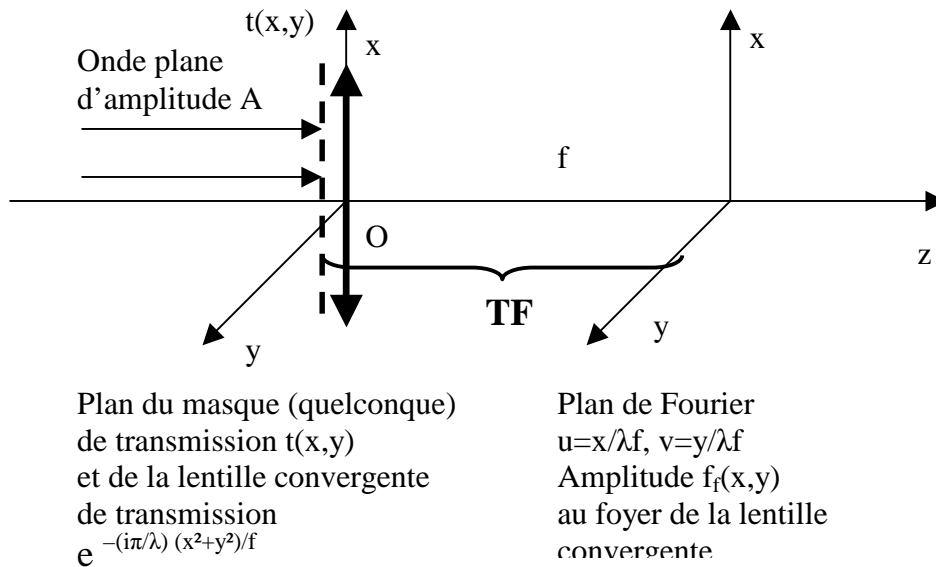
$u = \sin i \cos \varphi / \lambda$ ,  $u$  cosinus directeur de  $k/2\pi$  sur l'axe  $Ox$

$v = \sin i \sin \varphi / \lambda$ ,  $v$  cosinus directeur de  $k/2\pi$  sur l'axe  $Oy$

Les maxima sont observés lorsque  $\pi u d = m\pi$ ,  $m$  entier, soit  $u = \sin i \cos \varphi / \lambda = m/d$  ce qui constitue la *formule des réseaux*.

### VIII – Diffraction de Fresnel au foyer d'une lentille convergente

On se situe dans le cas d'une onde plane d'amplitude  $A$  qui traverse un masque quelconque  $t(x,y)$  quelconque **accolé** à une lentille convergente de distance focale  $f$  de transmission  $e^{-i(\pi/\lambda)(x^2+y^2)/f}$



L'amplitude incidente  $f_{in}(x,y)$  au plan  $z = 0$  est  $f_{in}(x,y) = A$  ; en sortie, elle devient  $f_{out}(x,y) = A t(x,y) e^{-i(\pi/\lambda)(x^2+y^2)/f}$

Dans le plan  $(x, y)$  de la lentille convergente en  $z = f$ , l'amplitude de l'onde est donnée par la transformée de Fourier Fresnel :

$$f_f(x,y) = [e^{2i\pi f/\lambda} / (i \lambda f)] e^{i\pi(x^2+y^2)/\lambda f} \text{TF}[f_{out}(x',y') e^{i\pi(x'^2+y'^2)/\lambda f}](u=x/\lambda f, v=y/\lambda f)$$

$$f_f(x,y) = [e^{2i\pi f/\lambda} / (i \lambda f)] e^{i\pi(x^2+y^2)/\lambda f} \text{TF}[A t(x',y') e^{-i(\pi/\lambda)(x'^2+y'^2)/f} e^{i\pi(x'^2+y'^2)/\lambda f}]$$

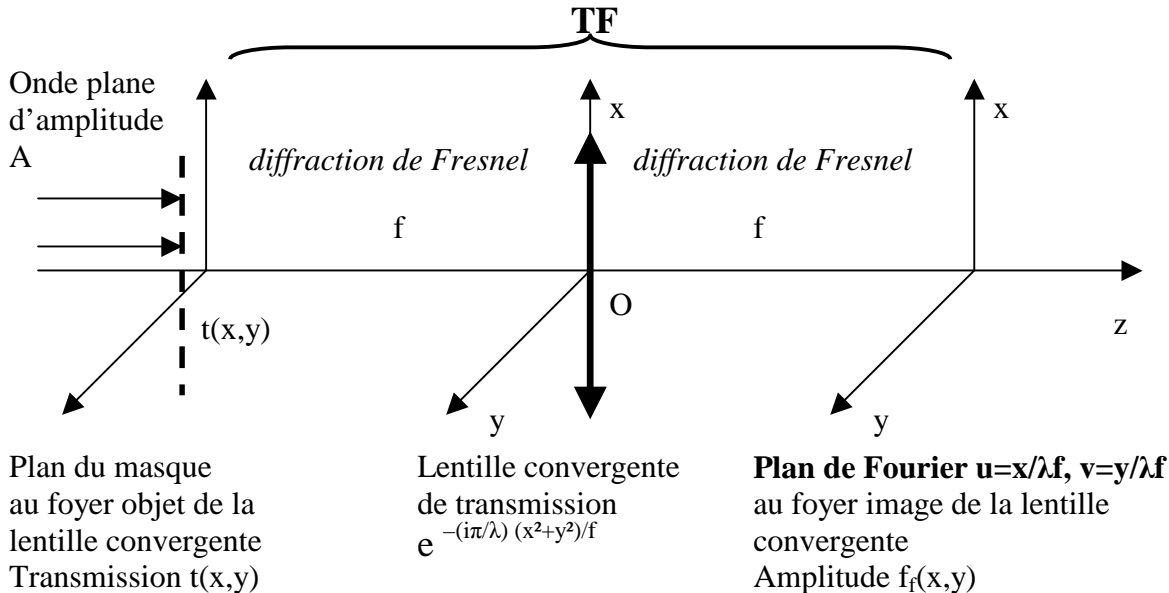
qui se simplifie immédiatement (en raison de la position  $z = f$  au foyer) en :

$$f_f(x,y) = A [e^{2i\pi f/\lambda} / (i \lambda f)] e^{i\pi(x^2+y^2)/\lambda f} \text{TF}[t(x',y')](u=x/\lambda f, v=y/\lambda f)$$

On constate ainsi qu'on observe au foyer de la lentille convergente une quantité proportionnelle à la **transformée de Fourier** du masque  $TF[t(x',y')](u,v)$  pour  $u=x/\lambda f$ ,  $v=y/\lambda f$ . Mais il y a un terme de phase quadratique dépendant de  $x$  et de  $y$  en  $e^{i\pi(x^2+y^2)/\lambda f}$  qui est gênant.

### VIII – 1 - Montage 2f à transformée de Fourier

Pour éliminer le terme de phase quadratique précédent  $e^{i\pi(x^2+y^2)/\lambda f}$  qui multiplie la transformée de Fourier, on utilise de préférence le montage 2f dans lequel le masque (quelconque) de transmission  $t(x,y)$  est placé au foyer objet de la lentille et non plus accolé à la lentille.



L'amplitude incidente au plan  $z = -f$  est  $A$  ; en sortie, elle devient  $A t(x,y)$

Dans le plan  $(x, y)$  de la lentille convergente en  $z = 0$ , l'amplitude de l'onde incidente est donnée par la transformée de Fresnel :

$$f_0(x,y) = e^{2i\pi f/\lambda} A t(x,y) * [e^{i\pi(x^2+y^2)/\lambda f}]/(i\lambda f)$$

et l'amplitude de l'onde sortante est  $f_0(x,y) e^{-(i\pi/\lambda)(x^2+y^2)/f}$

Dans le plan  $(x, y)$  de la lentille convergente en  $z = f$ , l'amplitude de l'onde est donnée par la transformée de Fourier Fresnel :

$$f_f(x,y) = [e^{2i\pi f/\lambda}/(i\lambda f)] e^{i\pi(x^2+y^2)/\lambda f} TF[f_0(x,y) e^{-(i\pi/\lambda)(x^2+y^2)/f} e^{i\pi(x^2+y^2)/\lambda f}](u=x/\lambda f, v=y/\lambda f)$$

$$\text{ce qui se simplifie en } f_f(x,y) = [e^{2i\pi f/\lambda}/(i\lambda f)] e^{i\pi(x^2+y^2)/\lambda f} TF[f_0(x,y)](u=x/\lambda f, v=y/\lambda f)$$

$$f_f(x,y) = -A [e^{4i\pi f/\lambda}/(\lambda^2 f^2)] e^{i\pi(x^2+y^2)/\lambda f} TF[t(x,y) * e^{i\pi(x^2+y^2)/\lambda f}](u=x/\lambda f, v=y/\lambda f)$$

$$f_f(x,y) = -A [e^{4i\pi f/\lambda}/(\lambda^2 f^2)] e^{i\pi(x^2+y^2)/\lambda f} TF[t(x,y)] TF[e^{i\pi(x^2+y^2)/\lambda f}](u=x/\lambda f, v=y/\lambda f)$$

La fonction  $e^{-i\pi\lambda f(u^2+v^2)}$  est la transformée de Fourier de la fonction  $[e^{i\pi(x^2+y^2)/\lambda f}]/(i\lambda f)$

$$f_f(x,y) = A [e^{4i\pi f/\lambda}/(i\lambda f)] e^{i\pi(x^2+y^2)/\lambda f} e^{-i\pi\lambda f(u^2+v^2)} TF[t(x,y)] \text{ pour } u=x/\lambda f, v=y/\lambda f$$

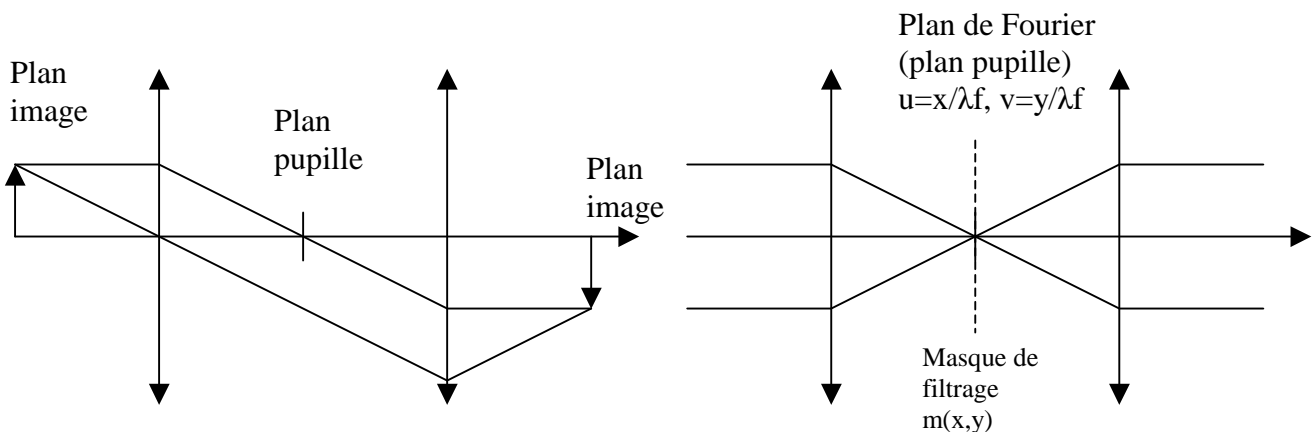
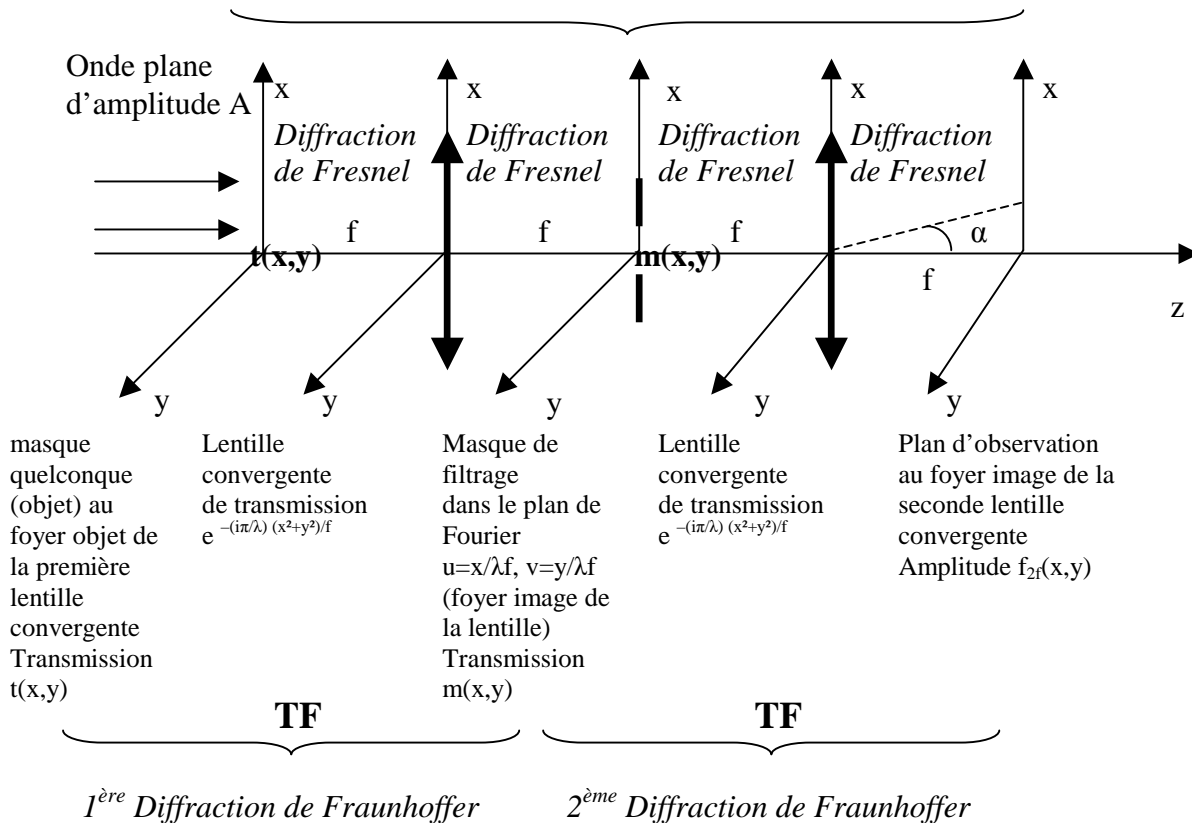
$$f_f(x,y) = A [e^{4i\pi f/\lambda}/(i\lambda f)] TF[t(x,y)](u=x/\lambda f, v=y/\lambda f)$$

le terme de phase quadratique a disparu dans ce montage 2f, on observe donc **au foyer image** de la lentille convergente (plan de Fourier) **la transformée de Fourier du masque placé au foyer objet**. Le montage 2f effectue donc dans son ensemble une diffraction de Fraunhofer.

## VIII – 2 - Montage 4f et filtrage optique

Si l'on place un masque de transmission  $m(x,y)$  au foyer image de la lentille ci dessus, dans le plan de Fourier, on obtient une amplitude filtrée égale au produit :

$$f_f(x,y) = A [e^{4i\pi f/\lambda} / (i \lambda f)] \text{TF}[t(x,y)](u=x/\lambda f, v=y/\lambda f) m(x,y)$$



Montage 4f du point de vue optique géométrique

montage 4f du point de vue diffraction

Au foyer image de la première lentille (plan de Fourier ou plan pupille) , on a vu que l'onde subit une première diffraction de Fraunhofer ; **son amplitude est la TF de l'objet** :

$$f_f(x,y) = A [e^{4i\pi f/\lambda} / (i \lambda f)] \text{TF}[t(x,y)](u=x/\lambda f, v=y/\lambda f)$$



Dans le plan de Fourier, les fréquences spatiales sont filtrées par le masque de transmission  $m(x,y)$ . L'onde d'amplitude  $f_t(x,y) m(x,y)$  subit ensuite une seconde diffraction de Fraunhofer, dont l'amplitude au foyer image de la seconde lentille est :

$$f_{2f}(x,y) = -A [e^{8i\pi f/\lambda} / (\lambda f)^2] \text{TF}[\text{TF}[t(x,y)](u=x/\lambda f, v=y/\lambda f) m(x,y)](u=x/\lambda f, v=y/\lambda f)$$

$$\text{or } \text{TF}[\text{TF}[t(x,y)](u=x/\lambda f, v=y/\lambda f)](u=x/\lambda f, v=y/\lambda f) = (\lambda f)^2 t(-x, -y)$$

Si  $M(u,v)$  est la transformée de Fourier du masque filtrant  $m(x,y)$ ,

$$\text{TF}[m(x,y)](u=x/\lambda f, v=y/\lambda f) = M(x/\lambda f, y/\lambda f)$$

La TF d'un produit de 2 fonctions est égale au produit de convolution des deux TF, donc :

$$f_{2f}(x,y) = -A [e^{8i\pi f/\lambda}] t(-x,-y) * M(x/\lambda f, y/\lambda f)$$

Les signes – dans  $t(-x,-y)$  indiquent un retournement de l'image ; le montage  $4f$  permet ainsi de former une image filtrée qui apparaît comme un **produit de convolution du masque d'entrée avec la transformée de Fourier du masque filtrant**.

Introduisons maintenant :

- les angles décrivant la **répartition angulaire** dans le plan d'observation  $\alpha_x = x/f$  et  $\alpha_y = y/f$
- les **fréquences spatiales angulaires** (nombres sans dimension)  $\alpha_u = u / (1/f) = f u$  et  $\alpha_v = v / (1/f) = f v$ , décrivant la répartition angulaire des fréquences spatiales

Considérons la fonction  $m(x=\lambda f u, y=\lambda f v)$  :

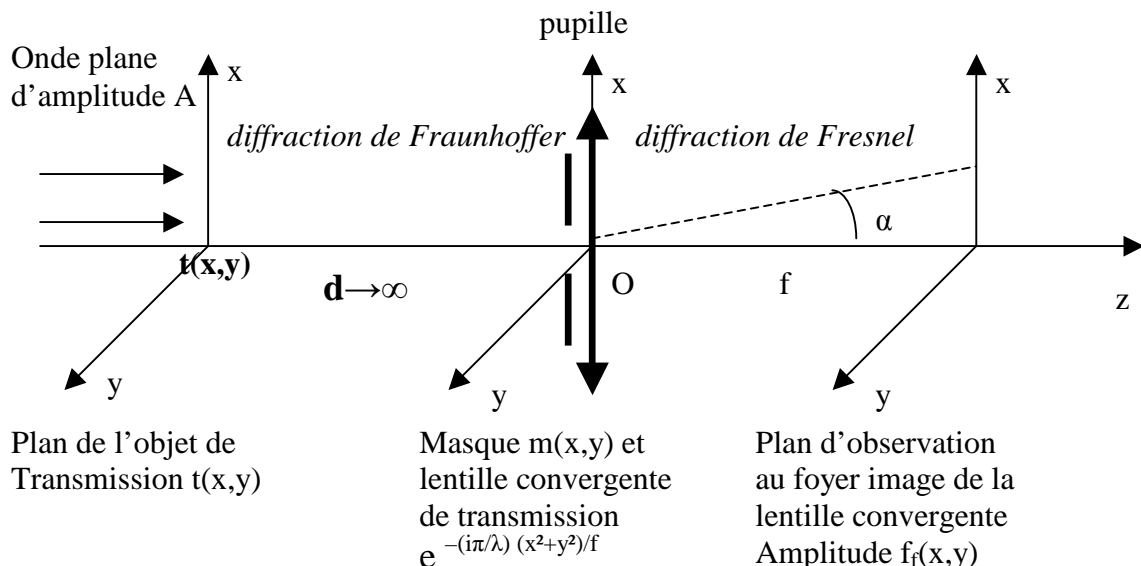
La fonction masque  $m(\lambda \alpha_u, \lambda \alpha_v)$  est appelée **fonction de transfert de modulation du filtrage ou MTF (Modulation Transfer Function)**.

Sa transformée de Fourier  $M(\alpha_x/\lambda, \alpha_y/\lambda)$  est appelée **fonction d'étalement du point ou PSF (Point Spread Function)**

Nous allons maintenant appliquer ces deux concepts à la formation des images.

## IX – Formation des images astronomiques

On considère le montage optique suivant, dans lequel l'objet astronomique est situé à une distance  $d \rightarrow \infty$  de l'objectif de l'instrument, que l'on assimile à un diaphragme d'amplitude (ouverture finie) de transmission  $m(x,y)$  suivi d'une lentille de transmission  $e^{-i(\pi/\lambda)(x^2+y^2)/f}$ . L'amplitude décrivant l'objet est  $A t(x,y)$  dans le plan  $(x,y)$  de l'objet.



## IX – 1 – Formation des images en lumière cohérente (amplitudes additives)

L'amplitude de l'onde dans le plan  $z=0$  à l'entrée du masque (ouverture de la lunette) est obtenu par une diffraction de Fraunhofer puisque  $d \rightarrow \infty$  :

$$f_{0in}(x,y) = A [e^{2i\pi d/\lambda} / (i \lambda d)] \text{TF}[t(x',y')](u=x/\lambda d, v=y/\lambda d)$$

A la sortie du masque (ouverture de la lunette) et de la lentille, on a :

$$f_0(x,y) = A [e^{2i\pi d/\lambda} / (i \lambda d)] \text{TF}[t(x',y')](u=x/\lambda d, v=y/\lambda d) m(x,y) e^{-i\pi/\lambda (x^2+y^2)/f}$$

L'amplitude  $f_f(x,y)$  dans le plan d'observation au foyer de la lentille est maintenant donnée par la transformée de Fresnel :

$$f_f(x,y) = [e^{2i\pi f/\lambda} / (i \lambda f)] e^{i\pi (x^2+y^2)/\lambda f} \text{TF}[f_0(x',y') e^{i\pi (x'^2+y'^2)/\lambda f}](u=x/\lambda f, v=y/\lambda f)$$

$$f_f(x,y) = -A [e^{2i\pi(f+d)/\lambda} / (\lambda^2 df)] e^{i\pi(x^2+y^2)/\lambda f} \text{TF}[\text{TF}[t(x',y')](u=x/\lambda d, v=y/\lambda d) m(x,y)](u=x/\lambda f, v=y/\lambda f)$$

$$\text{Or } \text{TF}[\text{TF}[t(x',y')](u=x/\lambda d, v=y/\lambda d)](u=x/\lambda f, v=y/\lambda f) = (\lambda d)^2 \text{TF}[\text{TF}[t(\lambda dx', \lambda dy')]](u=x/\lambda f, v=y/\lambda f)$$

$$\text{Et } \text{TF}[\text{TF}[t(\lambda dx', \lambda dy')]](u=x/\lambda f, v=y/\lambda f) = t(-xd/f, -yd/f)$$

$$\text{Posons } \text{TF}[m(x,y)](u=x/\lambda f, v=y/\lambda f) = M(x/\lambda f, y/\lambda f)$$

La TF d'un produit de 2 fonctions est égale au produit de convolution des deux TF, donc :

$$f_f(x,y) = -A [e^{2i\pi(f+d)/\lambda} (d/f)] e^{i\pi(x^2+y^2)/\lambda f} t(-xd/f, -yd/f) * M(x/\lambda f, y/\lambda f)$$

Introduisons comme précédemment :

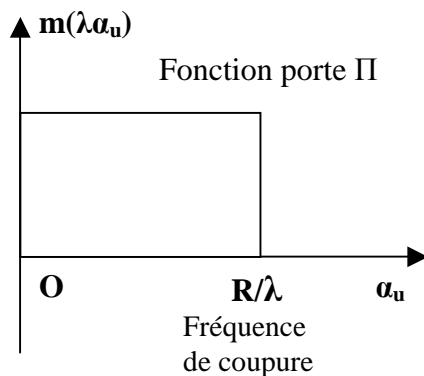
- les angles décrivant la **répartition angulaire** dans le plan d'observation  $\alpha_x = x/f$  et  $\alpha_y = y/f$
- les **fréquences spatiales angulaires** (nombres sans dimension)  $\alpha_u = u / (1/f) = f u$  et  $\alpha_v = v / (1/f) = f v$ , décrivant la répartition angulaire des fréquences spatiales

$$f_f(x,y) = -A [e^{2i\pi(f+d)/\lambda} (d/f)] e^{i\pi(x^2+y^2)/\lambda f} t(-\alpha_x d, -\alpha_y d) * M(\alpha_x/\lambda, \alpha_y/\lambda)$$

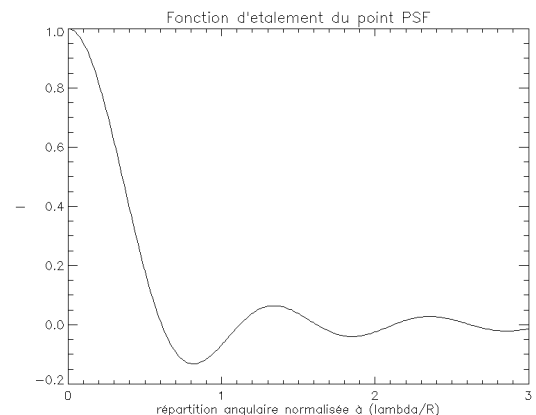
ou encore avec  $o(-\alpha_x, -\alpha_y) = t(-\alpha_x d, -\alpha_y d)$  fonction de répartition angulaire de l'amplitude de l'objet, les signes – indiquant un renversement :

$$f_f(x,y) = -A [e^{2i\pi(f+d)/\lambda} (d/f)] e^{i\pi(x^2+y^2)/\lambda f} o(-\alpha_x, -\alpha_y) * M(\alpha_x/\lambda, \alpha_y/\lambda)$$

**L'amplitude de l'onde au foyer de l'instrument est donc une convolution entre l'objet et la transformée de Fourier du masque décrivant l'ouverture du télescope.**



← MTF  
et PSF →  
d'une  
ouverture  
circulaire de  
rayon R en  
lumière  
cohérente



**La fonction masque  $m(\lambda\alpha_u, \lambda\alpha_v)$  est la MTF (Modulation Transfer Function) de l'instrument : elle représente la réponse impulsionnelle dans le plan pupille.**

**Sa transformée de Fourier  $M(\alpha_x/\lambda, \alpha_y/\lambda)$  est la PSF (Point Spread Function) de l'instrument. : elle représente la réponse impulsionnelle dans le plan image.**

Ces résultats ci dessus ne sont valables qu'en éclairage **cohérent**, pour lequel les amplitudes sont additives. En éclairage incohérent, les amplitudes ne sont plus additives et il faut travailler sur les intensités.

### **IX – 2 – Formation des images en lumière incohérente (intensités additives)**

La relation image/objet établie ci dessus devient en lumière **incohérente**:

$$\mathbf{I(x,y) = K \ O(-\alpha_x, -\alpha_y) * M(\alpha_x/\lambda, \alpha_y/\lambda)}$$

$O(-\alpha_x, -\alpha_y)$  est la fonction de répartition angulaire des **intensités de l'objet**.  $M(\alpha_x/\lambda, \alpha_y/\lambda)$  est la **PSF ou transformée de Fourier de la MTF, qui est maintenant la fonction d'autocorrélation du masque  $m \bullet m(\lambda\alpha_u, \lambda\alpha_v)$ . La PSF est aussi égale au carré du module de la transformée de Fourier du masque  $m(x,y)$ :  $M(\alpha_x/\lambda, \alpha_y/\lambda) = |\text{TF}[m(x,y)](\alpha_x/\lambda, \alpha_y/\lambda)|^2$**

On calcule souvent la PSF  $M(\alpha_x/\lambda, \alpha_y/\lambda)$ , puis la MTF (autocorrélation  $m \bullet m(\lambda\alpha_u, \lambda\alpha_v)$ ) par transformation de Fourier de la PSF.

### **IX – 3 - MTF et PSF d'une ouverture circulaire de rayon R en lumière incohérente**

La fonction  $m(r) \bullet m(r)$  où  $r^2 = x^2 + y^2$  se calcule analytiquement : c'est l'autocorrélation de la fonction porte  $\Pi_R(r)$ . On trouve :

$$m(r) \bullet m(r) = R^2 [ 2 \arccos(r/2R) - (r/R) (1 - (r/2R)^2)^{1/2} ]$$

d'où l'on tire en posant  $r = \lambda\alpha_u$ :

$$\mathbf{MTF(\lambda\alpha_u) = R^2 [ 2 \arccos(\lambda\alpha_u/2R) - (\lambda\alpha_u/R) (1 - (\lambda\alpha_u/2R)^2)^{1/2} ]}$$

En normalisant  $\alpha_u$  par  $R/\lambda$  et la fonction par  $\pi R^2$ , on obtient :

$$MTF(\alpha_u) = (1/\pi) [ 2 \arccos(\alpha_u/2) - \alpha_u (1 - (\alpha_u/2)^2)^{1/2} ]$$

La PSF est le carré du module de la transformée de Hankel du masque, c'est à dire d'une fonction porte de rayon  $\Pi_R(r)$  ; elle vaut normalisée à l'unité:

$$PSF(u) = [J_1(2\pi u R) / (\pi u R)]^2$$

Et en posant  $u = \alpha_r/\lambda$ , on obtient  $\mathbf{PSF(\alpha_r/\lambda) = [J_1(2\pi \alpha_r R/\lambda) / (\pi \alpha_r R/\lambda)]^2}$

puis en normalisant  $\alpha_r$  par  $\lambda/R$ , on peut tracer :

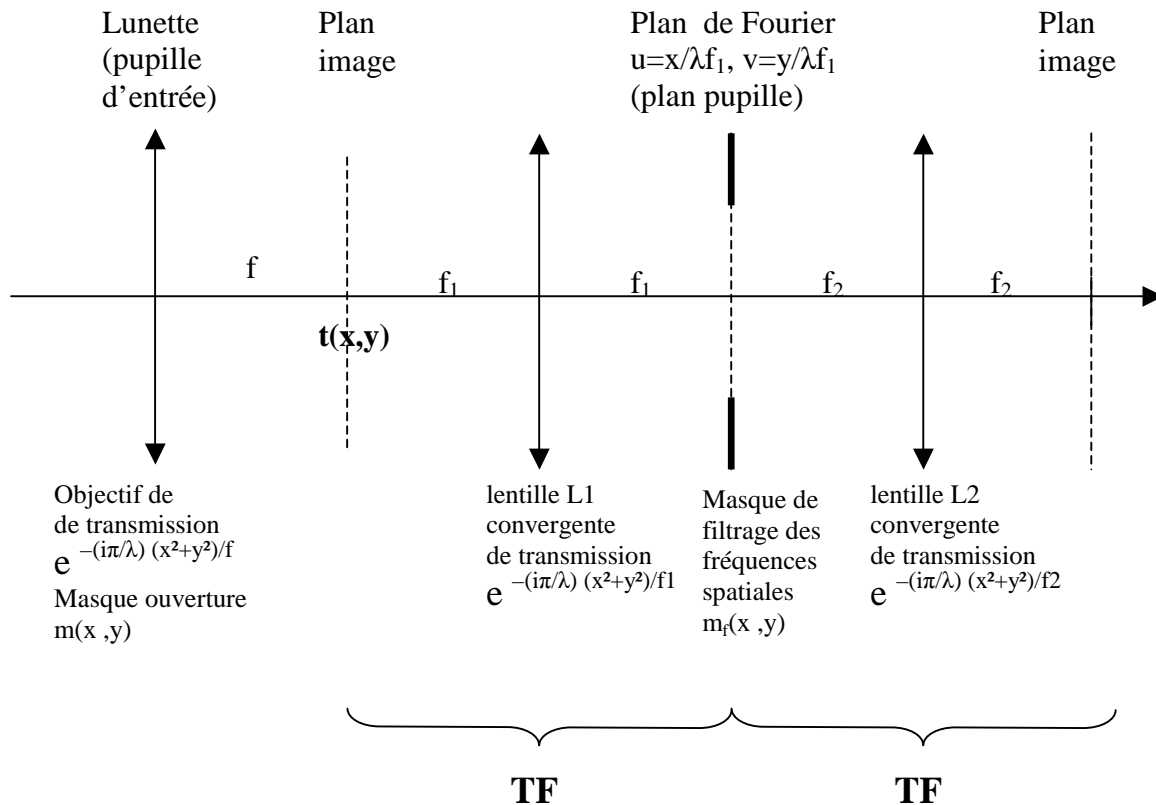
$$PSF(\alpha_r) = [J_1(2\pi \alpha_r) / (\pi \alpha_r)]^2$$

On a représenté ci dessous la MTF et la PSF en éclairage incohérent pour une lunette d'ouverture circulaire de rayon R (formules analytiques ci dessus) ainsi que pour un télescope à occultation centrale de rayon 0.5 R et 0.9 R (un anneau, calcul fait numériquement).

La PSF d'une ouverture circulaire est une fonction du type  $[J_1(u)/u]^2$ . Celle d'un anneau tend en limite vers une fonction du type  $[J_0(u)]^2$  lorsque l'occultation centrale devient totale.

La MTF admet une **fréquence de coupure**  $\alpha_u = 2 R/\lambda$  soit  $\mathbf{u_c = 2 [R/(\lambda f)]}$ .





Désignons par  $t(x,y)$  l'image solaire fournie par la lunette en son foyer.

On peut réaliser un filtrage optique sur la TF formée au foyer de la première lentille L1. Pour ce faire, on dispose dans le plan de Fourier ou plan pupille un masque de filtrage  $m_f(x,y)$ .

L'amplitude de l'onde  $f_0(x,y)$  au foyer de la lunette, selon les résultats obtenus à propos de la formation des images, est proportionnelle à:

$$f_0(x,y) = o(-\alpha_x, -\alpha_y) * M(\alpha_x/\lambda, \alpha_y/\lambda) = t(x,y)$$

$o(-\alpha_x, -\alpha_y)$  est la répartition angulaire de l'objet observé (le soleil) et  $M(\alpha_x/\lambda, \alpha_y/\lambda)$  la TF de l'objectif  $m(x,y)$  ou pupille d'entrée de la lunette.

Dans le plan de Fourier au foyer image de la première lentille L1, on a une première diffraction de Fraunhofer ; son amplitude est :

$$f_{f1}(x,y) = [e^{4i\pi f_1 / \lambda} / (i \lambda f_1)] \text{TF}[t(x,y)](u=x/\lambda f_1, v=y/\lambda f_1)$$

Comme  $\text{TF}[t(x,y)](u=x/\lambda f_1, v=y/\lambda f_1) = \text{TF}[o(x,y) * M(x/\lambda f, y/\lambda f)]$  pour  $(u=x/\lambda f_1, v=y/\lambda f_1)$ , on voit que **les fréquences spatiales de l'objet astronomique sont observables dans le plan pupille, mais modulées par la transmission de la pupille avec fréquence de coupure** selon :

$$f_{f1}(x,y) = [e^{4i\pi f_1 / \lambda} / (i \lambda f_1)] \text{TF}[o(x,y)](u=x/\lambda f_1, v=y/\lambda f_1) m(-xf/f_1, -yf/f_1)$$

**La réponse impulsionnelle est l'image de la pupille d'entrée de la lunette  $m(-xf/f_1, -yf/f_1)$ .**

On effectue maintenant un filtrage des fréquences spatiales dans le plan pupille par le masque  $m_f(x,y)$ . Dans le plan image au foyer image de la seconde lentille L2, on a une seconde diffraction de Fraunhofer ; son amplitude est :

$$f_2(x,y) = - [e^{8i\pi f/\lambda} / (\lambda^2 f_1 f_2)] \text{TF}[\text{TF}[t(x,y)](u=x/\lambda f_1, v=y/\lambda f_1) m_f(x,y)](u=x/\lambda f_2, v=y/\lambda f_2)$$

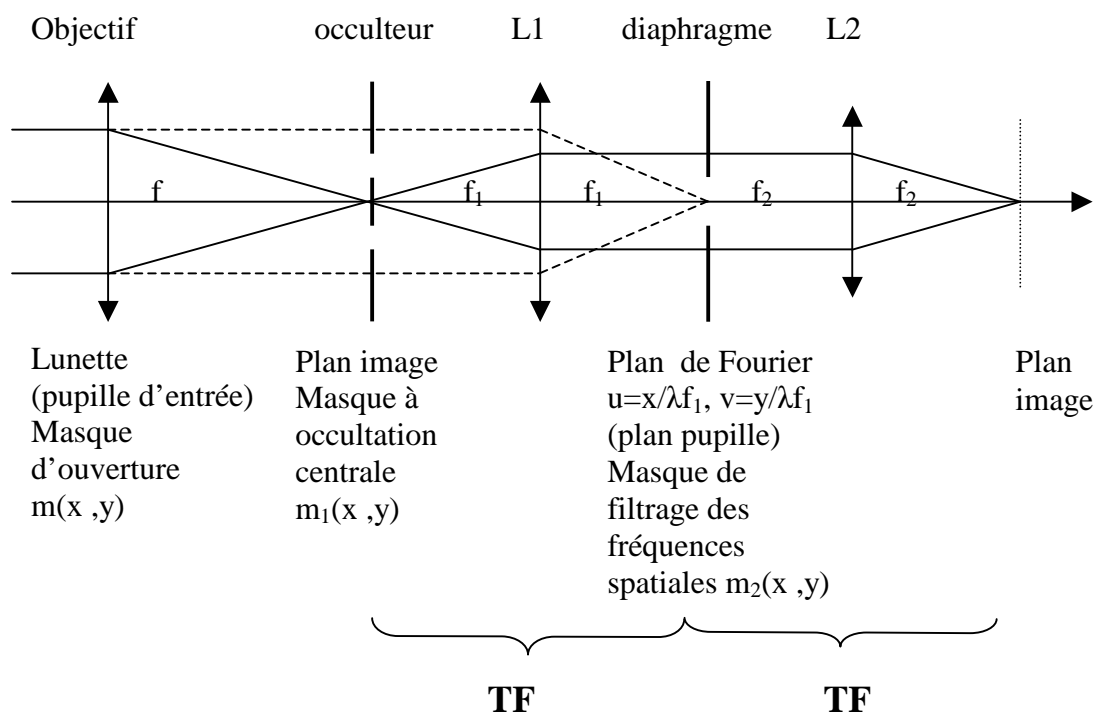
$$\text{or } \text{TF}[\text{TF}[t(x,y)](u=x/\lambda f_1, v=y/\lambda f_1)](u=x/\lambda f_2, v=y/\lambda f_2) = (\lambda f_1)^2 t(-xf_1/f_2, -yf_1/f_2)$$

Si  $M_f(u,v)$  est la transformée de Fourier du masque filtrant  $m_f(x,y)$ , on en conclut :

$$f_2(x,y) = - f_1/f_2 [e^{8i\pi f/\lambda}] t(-xf_1/f_2, -yf_1/f_2) * M_f(x/\lambda f_2, y/\lambda f_2)$$

Dans le plan focal de L2, on forme donc une nouvelle image renversée résultant du filtrage optique des fréquences spatiales dans le plan pupille.

### XI – Une application : le coronographe de Lyot



Désignons par  $t(x,y)$  l'image solaire fournie par la lunette. Au foyer de la lunette, on place un masque d'amplitude à occultation centrale (un disque ou un cône occulteur)  $m_1(x,y)$  dont le rôle est d'éliminer l'image du disque solaire et de ne transmettre que celle de la couronne  $10^6$  fois moins lumineuse. Néanmoins, il faut éliminer un maximum de défauts instrumentaux avant de voir apparaître la couronne dont la luminosité est très faible. En particulier, la diffraction due aux bords de l'objectif d'entrée (lunette) et à ses défauts de fabrication (bulles, traits, rayures) introduit dans l'image du limbe solaire de la lumière diffusée et des fréquences spatiales parasites que l'on peut filtrer sur la TF formée au foyer de la première lentille L1. Pour ce faire, on dispose dans le plan de Fourier ou plan pupille un second masque, le diaphragme de Lyot  $m_2(x,y)$ .

Désignons par  $t'(x,y) = t(x,y) m_1(x,y)$  l'image solaire fournie par la lunette et dont le disque est occulté par le masque  $m_1(x,y)$ .

Dans le plan de Fourier au foyer image de la première lentille L1, on a une première diffraction de Fraunhofer ; son amplitude est :

$$f_{f1}(x,y) = [e^{4i\pi f_1/\lambda} / (i \lambda f_1)] \text{TF}[t'(x,y)](u=x/\lambda f_1, v=y/\lambda f_1)$$

On effectue maintenant un filtrage des fréquences spatiales dans le plan pupille par le diaphragme  $m_2(x,y)$ . Dans le plan image au foyer image de la seconde lentille L2, on a une seconde diffraction de Fraunhofer ; son amplitude est :

$$f_{f2}(x,y) = - [e^{8i\pi f/\lambda} / (\lambda^2 f_1 f_2)] \text{TF}[\text{TF}[t'(x,y)](u=x/\lambda f_1, v=y/\lambda f_1) m_2(x,y)](u=x/\lambda f_2, v=y/\lambda f_2)$$

$$\text{or } \text{TF}[\text{TF}[t'(x,y)](u=x/\lambda f_1, v=y/\lambda f_1)](u=x/\lambda f_2, v=y/\lambda f_2) = (\lambda f_1)^2 t'(-xf_1/f_2, -yf_1/f_2)$$

Si  $M_2(u,v)$  est la transformée de Fourier du diaphragme filtrant  $m_2(x,y)$ ,

$$f_{f2}(x,y) = - f_1/f_2 [e^{8i\pi f/\lambda}] t'(-xf_1/f_2, -yf_1/f_2) * M_2(x/\lambda f_2, y/\lambda f_2)$$

Comment choisir le diaphragme de Lyot ? Dans le plan de Fourier, on a une image de la pupille d'entrée de la lunette. Le rayon extérieur du diaphragme doit filtrer les hautes fréquences et limiter la lumière diffractée par les bords de l'objectif; et un petit écran central filtrera quant à lui les basses fréquences (réflexions parasites dans l'objectif).

Cette lentille est placée en A (fig. 2) et elle forme l'image du Soleil sur un disque B en laiton noir qui déborde le Soleil d'une quinzaine de secondes seulement. Une lentille de champ C, placée derrière le disque, produit une image A' A'' de la lentille A sur un diaphragme D dont le centre est occupé par un petit écran E. Les bords du diaphragme arrêtent la lumière diffractée par les bords de la première lentille. Le petit écran arrête la lumière des images solaires produites par réflexion sur les faces de

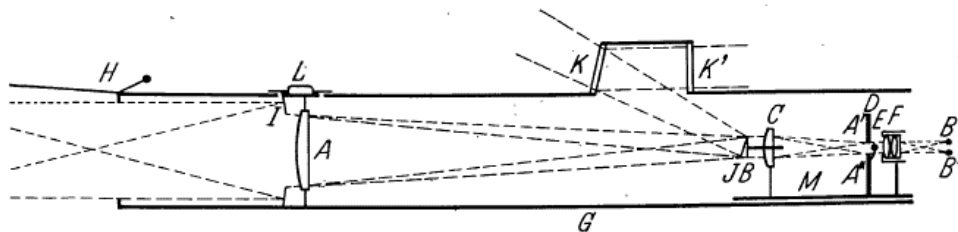


Fig. 2. Schéma du coronographe.

*Description originale du principe du coronographe par Bernard Lyot, parue en 1932*

cette lentille. Derrière le diaphragme et l'écran, à l'abri de la lumière diffusée, un objectif F, très fortement corrigé, forme en B' B'' une image

## Annexe

### Rappels sur la corrélation croisée et la fonction d'autocorrélation

Le produit de corrélation croisée de deux fonctions  $f(x')$  et  $g(x')$  est défini par

$$f \bullet g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f^*(x') g(x+x') dx' \quad \text{où } f^*(x') \text{ est la quantité conjuguée de } f(x')$$

$$f \bullet g(x) = f^*(-x') * g(x')$$

si  $f$  et  $g$  sont paires et réelles, alors  $f \bullet g(x) = g \bullet f(x) = f(x) * g(x)$  et convolution ou corrélation croisée sont identiques

$\text{TF}[f \bullet g] = \text{TF}[f^*(-x')] \text{TF}[g(x')]$ , formulation équivalente à :

$$\text{TF}[f \bullet g] = (\text{TF}[f])^* \text{TF}[g]$$

où  $(\text{TF}[f])^*$  désigne la quantité conjuguée de  $\text{TF}[f]$ .

Le produit d'autocorrélation de  $f(x')$  est défini par :

$$f \bullet f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f^*(x') f(x+x') dx' \quad \text{où } f^*(x') \text{ est la quantité conjuguée de } f(x')$$

$$\text{TF}[f \bullet f] = (\text{TF}[f])^* \text{TF}[f] = |\text{TF}[f]|^2$$

La transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation  $f \bullet f$  est égale à la densité spectrale de puissance  $|\text{TF}[f]|^2$ .